

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)



รูปภาพจาก : www.pixabay.com

บทที่ 4 สมดุลกล

คำถามที่ท้าทายอย่างมากในการอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ คือ “วัตถุคงสภาพการเคลื่อนที่เช่นเดิมอยู่ได้อย่างไร?” “อะไรที่เป็นสาเหตุที่ทำให้ระบบวัตถุยังคงสภาพอยู่เช่นเดิมได้?” และ “อะไรคือเงื่อนไขที่ทำให้ระบบวัตถุล้ม?” ในบทนี้จะอธิบายวิธีการในการหาคำตอบของคำถามที่ชวนปวดหัวเหล่านี้

ศูนย์กลางมวลและศูนย์กลาง (Center of Mass and Center of Gravity)



จุดศูนย์กลางมวลและศูนย์กลาง

จุดศูนย์กลางมวล (The Center of mass, CM ; $\vec{r}_{cm}$ [m]) คือ ตำแหน่งเฉลี่ยของมวลวัตถุ (ตำแหน่งเฉลี่ยโดยใช้น้ำหนักของวัตถุมาถ่วงน้ำหนักการเฉลี่ย) เปรียบเสมือนจุดรวมมวลของวัตถุ

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}$$

ในกรณีที่มวลเป็นจุด $\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m x}{M}\hat{i} + \frac{\sum m y}{M}\hat{j} + \frac{\sum m z}{M}\hat{k}$

ในกรณีที่มวลไม่เป็นจุด $\vec{r}_{cm} = \frac{\int x dm}{M}\hat{i} + \frac{\int y dm}{M}\hat{j} + \frac{\int z dm}{M}\hat{k}$

จุดศูนย์กลาง (The Center of Gravity, CG ; $\vec{r}_{cg}$ [m]) คือ ตำแหน่งเฉลี่ยของน้ำหนักวัตถุ (ตำแหน่งเฉลี่ยโดยใช้น้ำหนักของวัตถุมาถ่วงน้ำหนักการเฉลี่ย) เปรียบเสมือนเป็นจุดที่แรงโน้มถ่วงกระทำกับวัตถุ

$$\vec{r}_{cg} = x_{cg}\hat{i} + y_{cg}\hat{j} + z_{cg}\hat{k}$$

ในกรณีที่มวลเป็นจุด $\vec{r}_{cg} = \frac{\sum m g x}{W}\hat{i} + \frac{\sum m g y}{W}\hat{j} + \frac{\sum m g z}{W}\hat{k}$

ในกรณีที่มวลไม่เป็นจุด $\vec{r}_{cg} = \frac{\int x d(mg)}{W}\hat{i} + \frac{\int y d(mg)}{W}\hat{j} + \frac{\int z d(mg)}{W}\hat{k}$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

m คือ จดมวล

dm คือ มวลส่วนเล็กๆ ของวัตถุที่ประมาณได้ว่าเป็นจุดมวล

x, y และ z คือ ตำแหน่งของจุดมวลเทียบกับจุดกำเนิดบนแกน x, y และ z

M คือ มวลรวมของวัตถุ ($M = \Sigma m$ หรือ $M = \int dm$)

g คือ ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง หรือสนามโน้มถ่วง

W คือ น้ำหนักรวมของวัตถุ ($W = \Sigma mg$ หรือ $W = \int d(mg)$)

ในการอินทิเกรตอาจจะต้องมีการเปลี่ยนมวลเล็กๆ dm ให้อยู่ในรูปของความหนาแน่น λ, σ หรือ ρ ขึ้นอยู่กับลักษณะของมวล dm ดังนี้

1-D ความหนาแน่นเชิงเส้น $\lambda = \frac{dm}{d\ell}$; $d\ell$ คือ ความยาวของมวล dm

2-D ความหนาแน่นเชิงพื้นที่ $\sigma = \frac{dm}{dA}$; dA คือ พื้นที่ของมวล dm

3-D ความหนาแน่นเชิงปริมาตร $\rho = \frac{dm}{dV}$; dV คือ ปริมาตรของมวล dm

ข้อสังเกต

ศูนย์กลางมวลวัตถุไม่ขึ้นกับสถานที่ แต่ศูนย์กลางมวลอาจขึ้นกับสถานที่เนื่องจากในแต่ละที่อาจมีสนามโน้มถ่วงไม่คงที่

ในบริเวณสนามโน้มถ่วงสม่ำเสมอศูนย์กลางมวลจะอยู่จุดเดียวกับศูนย์กลางมวลวัตถุ

ศูนย์กลางมวลของวัตถุอาจอยู่ส่วนใดของวัตถุก็ได้ หรืออาจไม่อยู่ในเนื้อของวัตถุก็ได้ ขึ้นอยู่กับการกระจายมวลของวัตถุและรูปร่างของวัตถุ



สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.1

จงหาจุดศูนย์กลางมวลจากรูปด้านล่าง เมื่อ $A = 1.00 \text{ kg}$, $B = 2.00 \text{ kg}$, $C = 3.00 \text{ kg}$ และ $D = 4.00 \text{ kg}$

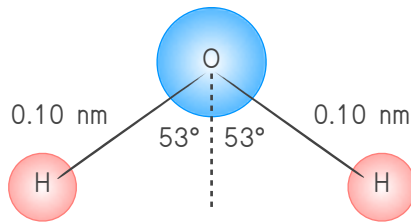


Answer : $0.100\hat{i} - 0.500\hat{j} \text{ m}$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.2

ถ้า O มีมวลประมาณ 15.999u และ H มีมวลประมาณ 1.008u และโมเลกุลของน้ำมีรูปร่างดังรูปด้านล่าง ถ้าประมาณว่า O และ H เป็นจุดมวล จงหาจุดศูนย์กลางมวลของโมเลกุลน้ำเทียบกับ O?

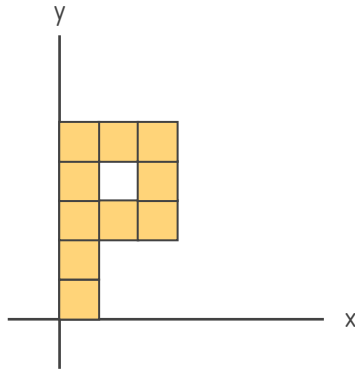


Answer : ต่ำจาก O มาเป็นระยะ 0.0067 nm

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.3

แผ่นวัตถุจัตุรัสยาวด้านละ ℓ มีมวลกระจายสม่ำเสมอ m ถูกนำมาวางเรียงกันดังรูปด้านล่าง จงหาจุดศูนย์กลางมวลของระบบดังกล่าว?

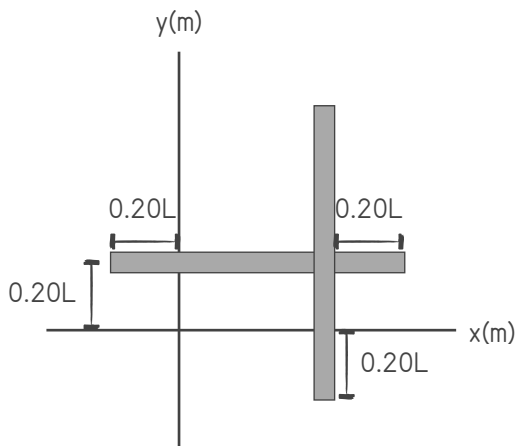


Answer : $1.3\ell\hat{i} + 3.0\ell\hat{j}$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.4

แท่งวัตถุมวลสองแท่งยาว L มวล M กระจายสม่ำเสมอ เมื่อนำมาวางดังรูปด้านล่าง จะมีจุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่ตำแหน่งใด?

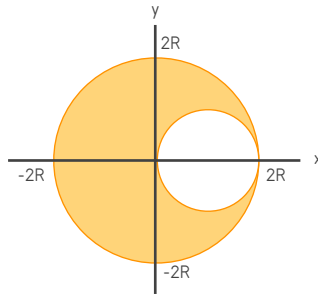


Answer : $0.45L\hat{i} + 0.25L\hat{j}$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.5 Challenge

แผ่นวงกลมรัศมี $2R$ มวล M กระจายสม่ำเสมอ ถูกคว้านออกเป็นรูปวงกลมรัศมี R ดังรูปด้านล่าง จงหาจุดศูนย์กลางมวลของรูปซึ่งถูกคว้านดังกล่าว?

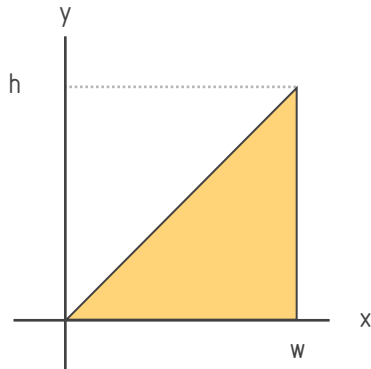


Answer : $-\frac{R}{3}\hat{i}$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.6 Challenge

จงหาจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นวัตถุมวล M กระจายสม่ำเสมอ ดังรูปด้านล่าง



สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

$$\text{Answer : } \frac{2w}{3}\hat{i} + \frac{h}{3}\hat{j}$$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.7 Challenge

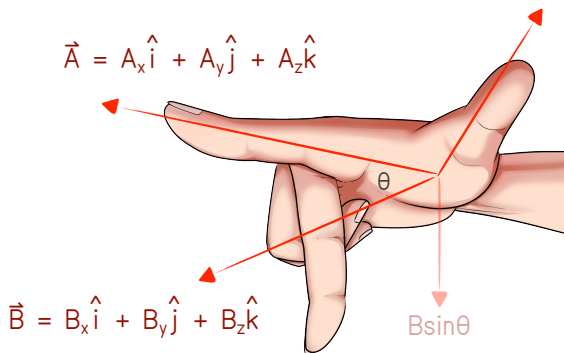
จงหาจุดศูนย์กลางมวลของแท่งวัตถุยาว L วางตัวอยู่บนแกน x โดยมีปลายวัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง $x = 0$ และ $x = L$ และมีความหนาแน่นเชิงเส้นเป็นไปตามสมการ $\lambda(x) = \alpha x^2$ เมื่อ α คือ ค่าคงที่ซึ่งมากกว่าศูนย์?

Answer : $\frac{3L}{4}$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (The Vector Product)



ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (The Vector Product) $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$



จากรูปด้านบน

$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$ และหาทิศของ $\vec{C}$ ตามกฎมือขวาจากรูปด้านบน

และ
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix}$$

สมบัติบางข้อของการ cross เวกเตอร์

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0 \quad ; \quad \vec{A} \parallel \vec{B}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \quad ; \quad \vec{A} \perp \vec{B}$$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.8

$\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ และ $\vec{C} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$ เวกเตอร์คู่ใดบ้างที่ขนานกัน

Answer : $\vec{A}$ กับ $\vec{C}$

Problem 4.9

จงหาขนาดของ $\vec{A} \times \vec{B}$ เมื่อ

a) $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ และ $\vec{B} = \hat{i} - 5\hat{j}$?

b) $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j}$ และ $\vec{B} = 3\hat{i} + \hat{k}$?

c) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j}$ และ $\vec{B} = -2\hat{i} - 6\hat{j}$?

Answer : a) 7, b) $\sqrt{41}$ and c) 0

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.10

เวกเตอร์ $\vec{A} = 3.0\hat{i} + 4.0\hat{j}$ และ $\vec{B} = 5.0\hat{i}$ จงหา $\vec{A} \times \vec{B}$ และมุมระหว่าง
เวกเตอร์ทั้งสองด้วยการใช้ $\vec{A} \times \vec{B}$?

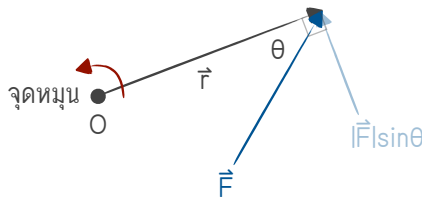
Answer : $-20 \hat{k}$ and 53°

โมเมนต์ของแรงและโมเมนต์ของแรงคู่ควบ (Moment of Force and Couple Moment)



โมเมนต์ของแรงและโมเมนต์ของแรงคู่ควบ

โมเมนต์ของแรง (Moment of Force ; M [N·m]) คือ ปริมาณที่บอกถึงแนวโน้มที่ทำให้วัตถุหมุนรอบจุดหมุน หรือรอบแกนหมุนหนึ่งๆ



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \rightarrow \quad |\vec{M}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \theta$$

$\vec{F}$ คือ แรงที่พิจารณา

$\vec{r}$ คือ เวกเตอร์ระยะห่างที่ชี้จากจุดหมุนมายังตำแหน่งที่แรง F กระทำ

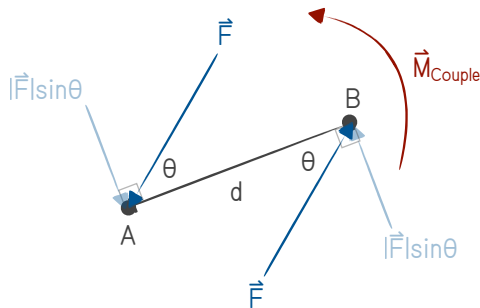
θ คือ มุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{r}$ กับเวกเตอร์ $\vec{F}$

ทาง Pinfist จะใช้โมเมนต์ในทิศทวนเข็มนาฬิกา (Anticlockwise) เป็นทิศ $+\hat{k}$ และทิศตามเข็มนาฬิกา (Clockwise) เป็นทิศ $-\hat{k}$ ตามระบบพิกัดแบบคาร์ทีเซียน (Cartesian Coordinate System)

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

แรงคู่ควบ (Couple) คือ แรงสองแรงที่ขนานกัน ขนาดเท่ากัน แต่มีทิศตรงข้ามกัน แรงคู่ควบหนึ่งคู่จะมีแรงลัพธ์เป็นศูนย์ แต่ทำให้เกิดโมเมนต์ขึ้น

โมเมนต์ของแรงคู่ควบ (Couple Moment) คือ โมเมนต์ที่เกิดจากแรงคู่ควบ



โมเมนต์รวมรอบจุด A คือ $\vec{M}_A = dF \sin \theta \hat{k}$

โมเมนต์รวมรอบจุด B คือ $\vec{M}_B = dF \sin \theta \hat{k}$

โมเมนต์รวมรอบจุดกึ่งกลางระหว่างจุด AB คือ

$$\vec{M}_{AB} = \left(\frac{d}{2}\right)F \sin \theta \hat{k} + \left(\frac{d}{2}\right)F \sin \theta \hat{k} = dF \sin \theta \hat{k}$$

ไม่ว่าจะคิดที่จุดไหนก็จะได้ $\vec{M} = dF \sin \theta \hat{k}$

$$\therefore \vec{M}_{\text{Couple}} = \vec{d} \times \vec{F} \rightarrow |\vec{M}_{\text{Couple}}| = |d| |F| \sin \theta$$

$\vec{F}$ คือ แรงที่พิจารณา

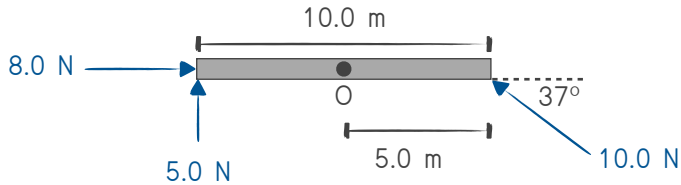
$\vec{d}$ คือ เวกเตอร์ระยะห่างระหว่างแรงสองแรงที่มีขนาดเท่ากันและขนานกัน โดยมีทิศชี้จาก F คู่ควบมายังตำแหน่งที่แรง $\vec{F}$ ใช้พิจารณาหาโมเมนต์ของแรงคู่ควบ

θ คือ มุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{d}$ กับเวกเตอร์ $\vec{F}$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.11

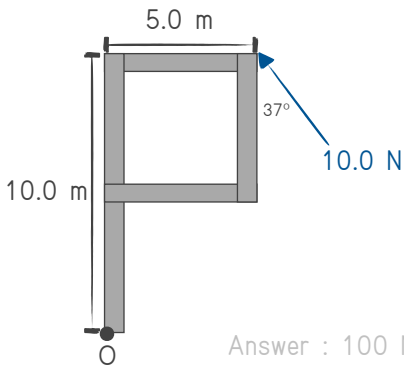
จากรูปด้านล่าง จงหาโมเมนต์ลัพธ์รอบจุด O?



Answer : 5 N·m ทิศทวนเข็มนาฬิกา (Anticlockwise)

Problem 4.12

จากรูปด้านล่าง จงหาโมเมนต์ลัพธ์รอบจุด O?

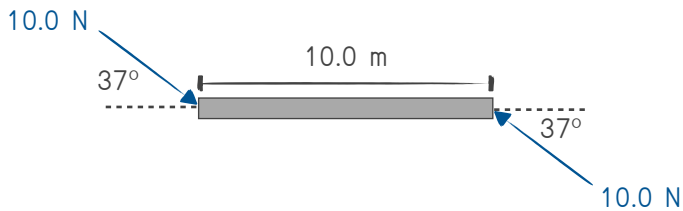


Answer : 100 N·m ทิศทวนเข็มนาฬิกา (Anticlockwise)

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.13

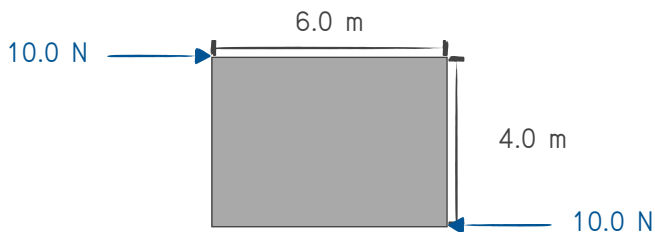
จากรูปด้านล่าง จงหาโมเมนต์ของแรงคู่ควบ?



Answer : 60.0 N·m ทิศทวนเข็มนาฬิกา (Anticlockwise)

Problem 4.14

จากรูปด้านล่าง จงหาโมเมนต์ของแรงคู่ควบ?



Answer : 40 N·m ทิศตามเข็มนาฬิกา (Clockwise)

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)



รูปแบบของสมดุล

สมดุลการเคลื่อนที่ (Translational Equilibrium) คือ สภาวะที่วัตถุไม่เปลี่ยนสภาพการเคลื่อนที่ หรือมีความเร่งเป็นศูนย์ (มีความเร็วคงที่ หรืออยู่นิ่ง)

$$\vec{a} = 0 \quad \rightarrow \quad \Sigma \vec{F} = 0$$

สมดุลการหมุน (Rotational Equilibrium) คือ สภาวะที่วัตถุไม่เปลี่ยนสภาพการหมุน หรือมีความเร่งเชิงมุมเป็นศูนย์ (มีความเร็วเชิงมุมคงที่ หรือไม่มีการหมุน)

$$\vec{\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad \Sigma \vec{M} = 0$$

สมดุลสถิต (Static Equilibrium) คือ วัตถุอยู่นิ่งและไม่มีการหมุน

สมดุลจลน์ (Dynamic Equilibrium) คือ วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ หรือหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่

ข้อสังเกต

วัตถุที่เคลื่อนที่อาจอยู่ในสมดุลของการเคลื่อนที่ได้ ถ้าวัตถุนั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ (ความเร่งเป็นศูนย์)

วัตถุที่หมุนอาจอยู่ในสมดุลของการหมุนได้ ถ้าวัตถุนั้นหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ (ความเร่งเชิงมุมเป็นศูนย์)

วัตถุที่อยู่ในสมดุลต่อการหมุนอาจมีแรงกระทำต่อวัตถุ โดยผลรวมของโมเมนต์ของแรงจะเป็นศูนย์

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.15

แรงสามแรง มีขนาด 3 N, 5 N และ 7 N สามารถรวมกันแล้วสมดุลได้หรือไม่ ถ้าได้ มุมระหว่างสองแรงแรกจะเป็นเท่าใด?

Answer : 60°

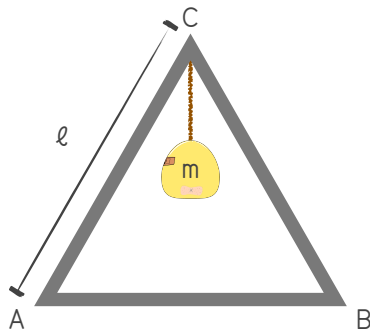
Problem 4.16

แรงสามแรง มีขนาด 2 N, 5 N และ 10 N สามารถรวมกันแล้วสมดุลได้หรือไม่ ถ้าได้ มุมระหว่างสองแรงแรกจะเป็นเท่าใด?

Answer : ไม่สามารถรวมกันได้สมดุล

Problem 4.17

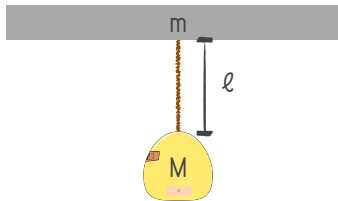
กรอบวัตถุสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC ยาวด้านละ ℓ แขนงวัตถุมวล m ไว้ภายใน ดังรูปด้านล่าง จงหาขนาดของแรงที่กระทำด้าน BC?



Answer : $\frac{mg}{\sqrt{3}}$

Problem 4.18

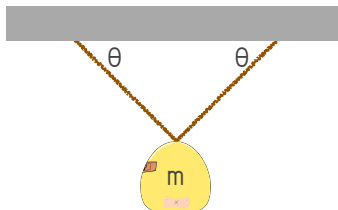
วัตถุมวล M ยึดติดกับปลายเชือกมวล m กระจายสม่ำเสมอ ยาว ℓ ดังรูปด้านล่าง
จงหาขนาดแรงดึงในเส้นเชือกที่จุดกึ่งกลางของเส้นเชือก?



Answer : $(M + \frac{m}{2})g$

Problem 4.19

วัตถุมวล m ผูกติดกับเชือกเบาดังรูปด้านล่าง จงหาแรงดึงในเส้นเชือกทั้งสอง?

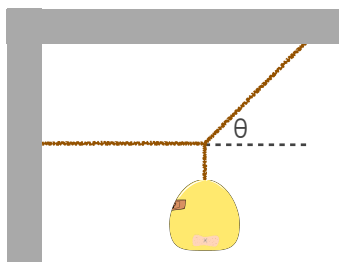


สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

$$\text{Answer : } \frac{mg}{2\sin\theta}$$

Problem 4.20

จากรูปด้านล่าง วัตถุถูกแขวนด้วยเชือกเบาสามเส้น จะแขวนมวลได้มากที่สุดเท่าใด เมื่อเชือกแต่ละเส้นรับแรงได้สูงสุด T และมุม $0^\circ < \theta < 90^\circ$?



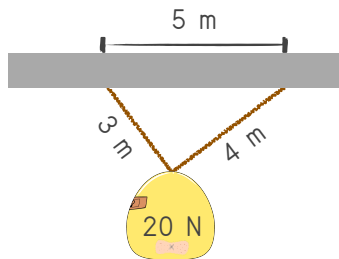
สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Answer : $\frac{T \tan \theta}{g}$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.21

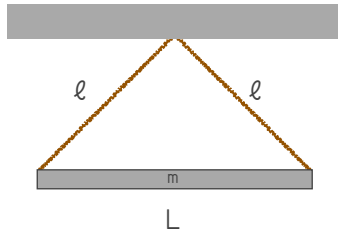
จากรูปด้านล่าง จงหาแรงดึงในเส้นเชือกแต่ละเส้น?



Answer : $T_{3m} = 16\text{N}$ and $T_{4m} = 12\text{ N}$

Problem 4.22

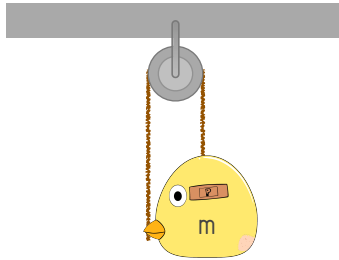
คนสม่ำเสมอมวล m ยาว L แขวนด้วยเชือกเบายาว ℓ ดังรูปด้านล่าง จงหาแรงดึงในเส้นเชือกทั้งสองเส้น?



Answer :
$$\frac{mg}{2\sqrt{1 - \left(\frac{L}{2\ell}\right)^2}}$$

Problem 4.23

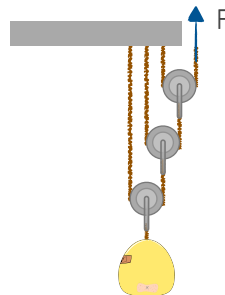
ลูกไก่มวล m ผูกติดกับเชือกเบาคล้องผ่านรอกเบาไร้ความฝืด ถ้าลูกไก่ใช้ปากดึงเชือกให้ค่อยๆ ขยับขึ้นไปด้วยความเร็วคงที่ ดังรูปด้านล่าง ลูกไก่ต้องใช้แรงดึงเชือกขนาดเท่าใด?



Answer : $\frac{mg}{2}$

Problem 4.24

ออกแรง F ดึงวัตถุด้วยระบบรอกเบาไร้ความฝืดและเชือกเบา ดังรูปด้านล่าง จะสามารถดึงน้ำหนักขึ้นมาได้มากที่สุดเท่าใด?



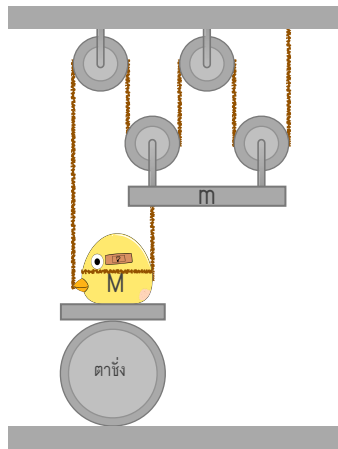
สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Answer : 8F

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.25

ลูกไก่มวล M ผูกติดกับระบบรอกเบาไร้ความฝืด เชือกเบา และคานมวล m ถ้าลูกไก่ใช้ปากดึงเชือกด้วยแรงคงที่ F ดังรูปด้านล่าง ตาขังจะอ่านค่าน้ำหนักของลูกไก่ได้เท่าใด?

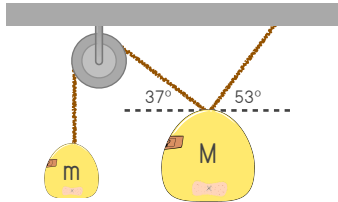


Answer : $(M + m)g - 5F$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.26

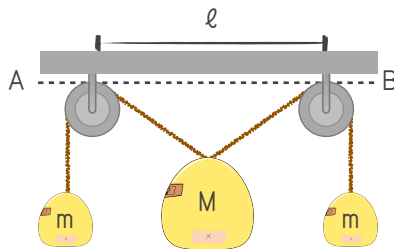
วัตถุมวล M และ m อยู่ในระบบสมดุลดังรูปด้านล่าง จงหา $\frac{M}{m}$?



Answer : $\frac{5}{3}$

Problem 4.27

วัตถุมวล m สองก้อนและมวล M หนึ่งก้อน อยู่ในระบบสมดุลดังรูปด้านล่าง จงหาว่ามวล M จะอยู่ต่ำกว่าระดับ AB เท่าใด?

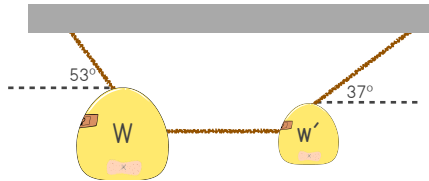


$$\text{Answer : } \frac{M\ell}{2\sqrt{4m^2 - M^2}}$$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.28

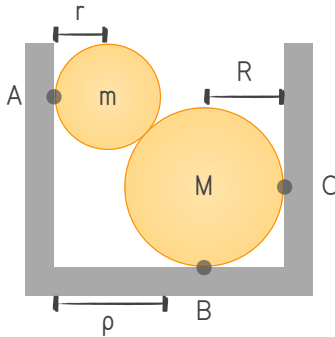
วัตถุน้ำหนัก W อยู่ในระบบสมดุลดังรูปด้านล่าง จงหาน้ำหนัก w' ?



Answer : $\frac{9W}{16}$

Problem 4.29

วัตถุทรงกลมรัศมี r มวล m และวัตถุทรงกลมรัศมี R มวล M วางอยู่ในกล่องทรงกระบอกรัศมี ρ โดยที่ $\rho < r + R$ ดังรูปด้านล่าง ถ้าไม่คิดแรงเสียดทาน จงหาขนาดของแรงแนวฉากที่เกิดขึ้นในจุด B?

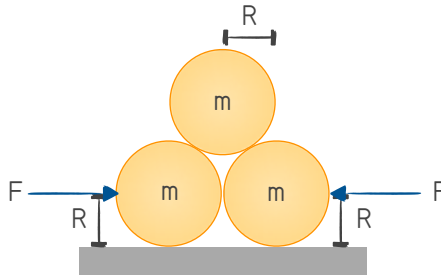


Answer : $(m + M)g$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.30

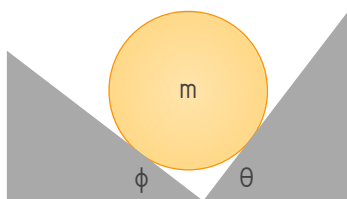
วัตถุทรงกระบอกรัศมี R มวล m วางชิดกันสามชั้นบนพื้นลื่น ดังรูปด้านล่าง ต้องใช้แรง F ขนาดอย่างน้อยเท่าใด เพื่อให้วัตถุทั้งสามชั้นไม่แยกออกจากกัน?



Answer : $\frac{mg}{2\sqrt{3}}$

Problem 4.31

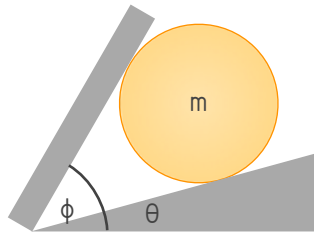
วัตถุทรงกลมมวล m วางอยู่บนพื้นเอียงไร้แรงเสียดทานดังรูปด้านล่าง จงหาแรงแนวฉากที่พื้นเอียงทั้งสองกระทำกับวัตถุดังกล่าว?



Answer : $n_\phi = \frac{mg}{\sin\phi(\cot\theta + \cot\phi)}$ and $n_\theta = \frac{mg}{\sin\theta(\cot\theta + \cot\phi)}$

Problem 4.32

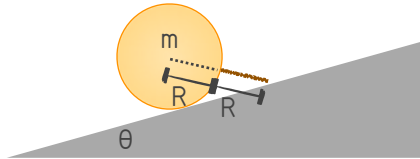
วัตถุทรงกลมมวล m วางอยู่บนพื้นเอียงไร้แรงเสียดทานดังรูปด้านล่าง จงหาแรงแนวฉากที่พื้นเอียงทั้งสองกระทำกับวัตถุดังกล่าว?



$$\text{Answer : } n_\phi = \frac{mg}{\sin\phi(\cot\theta - \cot\phi)} \text{ and } n_\theta = \frac{mg}{\sin\theta(\cot\theta - \cot\phi)}$$

Problem 4.33

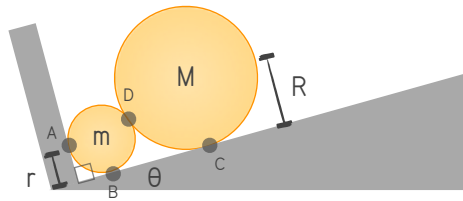
วัตถุทรงกลมรัศมี R มวล m มีเชือกยาว R ผูกติดมวลดังกล่าวไว้กับพื้นเอียงไร้แรงเสียดทานทำมุม θ กับแนวระดับ ดังรูปด้านล่าง จงหาแรงดึงในเส้นเชือกดังกล่าว?



Answer : $\frac{2mg\sin\theta}{\sqrt{3}}$

Problem 4.34

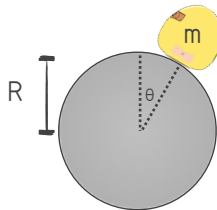
วัตถุทรงกลมรัศมี r มวล m และรัศมี R มวล M ($R > r$ และ $M > m$) ถูกวางไว้ติดกันบนพื้นเอียงซึ่งทำมุม θ กับแนวระดับ ดังรูปด้านล่าง ถ้าประมาณว่าทุกผิวสัมผัสไร้แรงเสียดทาน จงหาขนาดแรงที่มวล m กระทำกับมวล M (แรงที่จุด D)?



$$\text{Answer : } \frac{Mg(R + r)\sin\theta}{2\sqrt{rR}}$$

Problem 4.35

วัตถุมวล m วางอยู่บนผิวทรงกลมรัศมี R บนตำแหน่งซึ่งเอียงทำมุม θ กับแนวตั้ง ดังรูปด้านล่าง จงหาสัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างวัตถุกับผิวทรงกลมดังกล่าว?

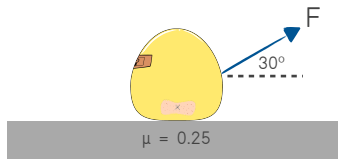


Answer : $\tan\theta$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.36

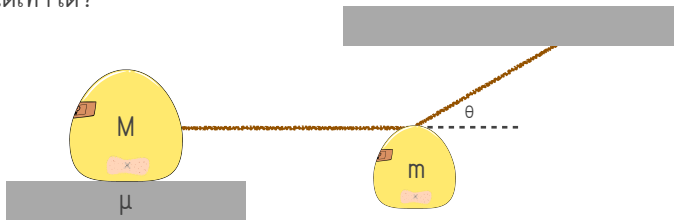
ออกแรง F ซึ่งมีขนาดสูงสุด 100 N ดึงวัตถุเอียงทำมุม 30° กับแนวราบ ดังรูปด้านล่าง ถ้าต้องการให้วัตถุเคลื่อนที่ไปบนพื้นแนวราบด้วยความเร็วคงที่ โดยสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ระหว่างพื้นกับวัตถุเท่ากับ 0.25 วัตถุดังกล่าวจะต้องมีมวลไม่เกินเท่าใด?



Answer : 40 kg

Problem 4.37

ระบบวัตถุมวล m และ M ผูกติดกันด้วยเชือกเบาให้ยู่หนึ่ง ดังรูปด้านล่าง ถ้าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตระหว่างพื้นกับมวล M เท่ากับ μ มวล m มีขนาดสูงสุดได้เท่าใด?



Answer : $\mu M \tan \theta$

Problem 4.38

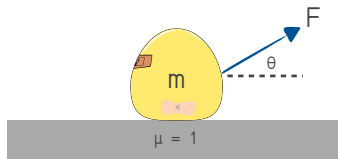
เส้นวัตถุบางมวลกระจายตัวสม่ำเสมอ มีบางส่วนห้อยตัวลงมาจากขอบโต๊ะยาว ℓ ถ้าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตของวัตถุกับโต๊ะเท่ากับ μ วัตถุดังกล่าวจะต้องยาวน้อยสุดเท่าใด จึงจะเริ่มไถลลงมาจากโต๊ะตามแรงโน้มถ่วง?

$$\text{Answer : } \frac{\ell(1 + \mu)}{\mu}$$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.39

วัตถุมวล m ถูกดึงด้วยแรงขนาด F ดังรูปด้านล่าง ลากวัตถุไปบนพื้นซึ่งมีสัมประสิทธิ์ความเสียดทานเท่ากับ 1 จะต้องออกแรงน้อยสุดเท่าใด?

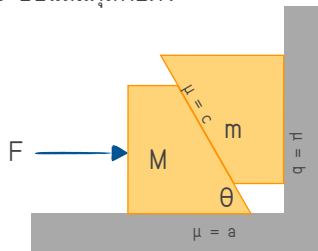


Answer : $\frac{mg}{\sqrt{2}}$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.40 Challenge

วัตถุมวล m และ M ถูกแรง F ดันให้อยู่ในสภาวะสมดุล ถ้าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่พื้นราบเท่ากับ a , ที่ผนังแนวดิ่งเท่ากับ b และที่ระหว่างวัตถุทั้งสองเท่ากับ c จงหาแรง F น้อยสุดที่ทำให้ระบบนี้สมดุลพอดี?

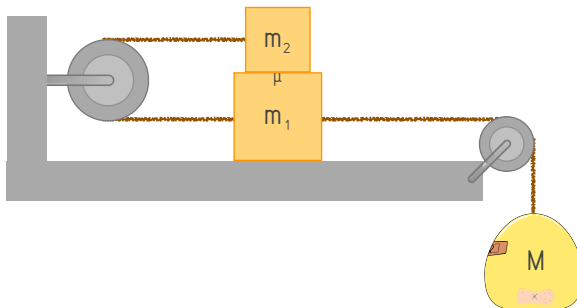


สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

$$\text{Answer : } \left(\frac{m((1 - ac)\sin\theta - (a + c)\cos\theta)}{(c + b)\sin\theta + (1 - bc)\cos\theta} - aM \right)g$$

Problem 4.41

จากรูปด้านล่าง ถ้ามวล m_1 เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ และสัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างมวล m_1 และ m_2 เท่ากับ μ จงหาสัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างมวล m_1 กับพื้น?

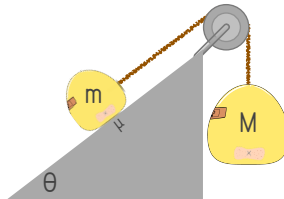


สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

$$\text{Answer : } \frac{M - 2\mu m_2}{m_1 + m_2}$$

Problem 4.42

วัตถุมวล m วางอยู่บนพื้นเอียงทำมุม θ และมีสัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างพื้นกับมวล m เท่ากับ μ ดังรูปด้านล่าง จงหาขนาดมวล M ที่เป็นไปได้ที่ยังคงทำให้มวล m อยู่นิ่งบนพื้นเอียงโดยไม่ไถล?

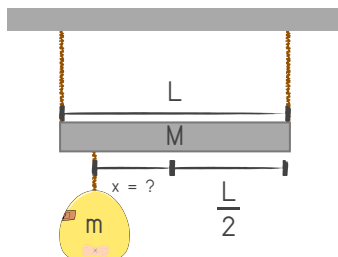


สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

$$\text{Answer : } m\cos\theta(\tan\theta - \mu) \leq M \leq m\cos\theta(\tan\theta + \mu)$$

Problem 4.43

คานส์ม่่าเสมอยาว L มวล M ถ้าคานอยู่ในแนวระดับและถูกแขวนไว้กับเชือกเบาซึ่งรับแรงได้สูงสุด F จะแขวนมวล m ห่างจากกึ่งกลางคานเป็นระยะเท่าใดจึงจะทำให้เชือกขาดได้พอดี?



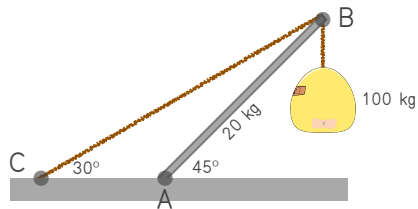
สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

$$\text{Answer : } \frac{(2F - (M + m)g)L}{2mg}$$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.44

คาน AB มวล 20 kg กระจายสม่ำเสมอถูกตรึงให้อยู่กับด้วยลวด BC และถ่วงด้วยมวล 100 kg ดังรูปด้านล่าง จงหาแรงดึงในเส้นลวด BC?

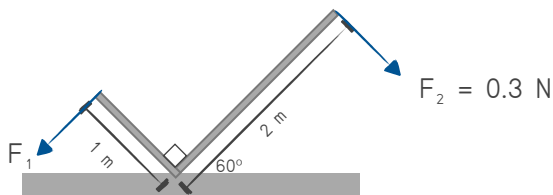


Answer : 2.9 kN

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.45

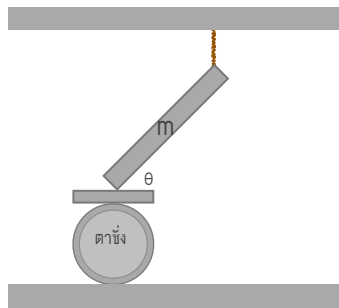
คานารูปตัว L ถูกแรง F_1 และ $F_2 = 0.3 \text{ N}$ กระทำให้อยู่ในสภาวะสมดุล ดังรูปด้านล่าง ถ้าคานาดังกล่าวมีมวลกระจายสม่ำเสมอและมีมวลต่อความยาวเท่ากับ 0.8 kg/m จงหาขนาดของ F_1 ?



Answer : 5 N

Problem 4.46

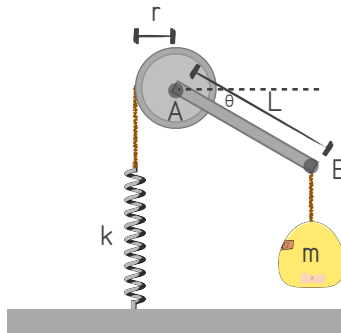
คานมวล m กระจายตัวสม่ำเสมอ ผูกด้วยเชือกเบาไว้ที่ปลายด้านหนึ่ง และอีกด้านหนึ่งของคานกดลงบนตาชั่ง ดังรูปด้านล่าง ตาชั่งจะอ่านค่าได้เท่าใด?



Answer : $\frac{mg}{2}$

Problem 4.47 Challenge

จากรูปด้านล่างในตอนที่ยังไม่มีมวล m มาถ่วงที่จุด B แขน AB ซึ่งยาว L เบามาก และยึดแน่นกับล้อกลมเบารัศมี r จะวางตัวอยู่แนวราบพอดี เมื่อห้อยมวล m ที่จุด B แขน AB จะเอียงทำมุม θ เทียบกับแนวราบ ซึ่งทำให้ล้อหมุนตัวและดึงสปริงให้ยืดออก จงหาค่าคงที่ของสปริง ที่ทำให้ระบบอยู่ในสภาวะสมดุลที่มุม θ ดังกล่าว?

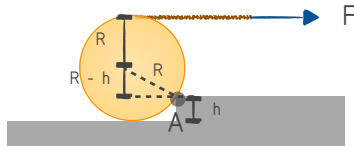


$$\text{Answer : } \frac{mgL\cos\theta}{r^2\theta}$$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.48

ทรงกระบอกหนัก W รัศมี R มีเชือกพันพันอยู่ที่ขอบทรงกระบอก ดังรูปด้านล่าง จงหาขนาดของแรง F ซึ่งดึงที่ปลายเชือกในแนวราบ เพื่อให้ทรงกระบอกขึ้นไปบนขอบซึ่งสูง h ได้พอดี?

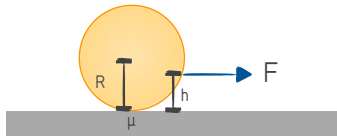


$$\text{Answer : } \frac{W\sqrt{2Rh - h^2}}{2R - h}$$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.49

วัตถุทรงกลมตันรัศมี R น้ำหนัก W กระจายสม่ำเสมอ มีแรง F มากระทำในแนวระดับ ดังรูปด้านล่าง ถ้าสัมประสิทธิ์ระหว่างทรงกลมตันกับพื้นดังกล่าวเท่ากับ μ จงหาค่า h ที่ทำให้วัตถุทรงกลมเลื่อนไปบนพื้นในแนวระดับด้วยความเร็วคงที่โดยไม่กลิ้งด้วยแรง?

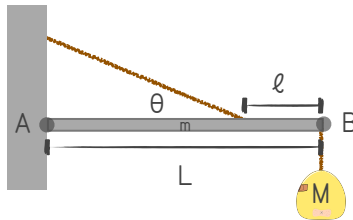


$$\text{Answer : } \left(1 - \frac{\mu W}{F}\right)R$$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.50

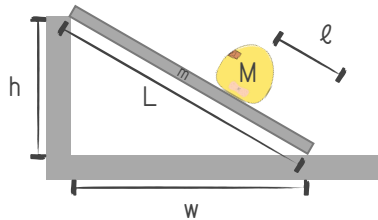
ลวดเบาดึงคาน AB ซึ่งมีมวล m กระจายสม่ำเสมอ ยาว L ถ้ามีมวล M มาแขวนไว้ที่ปลาย B ดังรูปด้านล่าง และปลาย A ตรึงไว้แน่นกับกำแพงดังรูปด้านล่าง จงหาขนาดแรงดึงในเส้นที่ทำให้ระบบอยู่ในสมดุล?



$$\text{Answer : } \frac{(2M + m)gL}{2(L - l)\sin\theta}$$

Problem 4.51

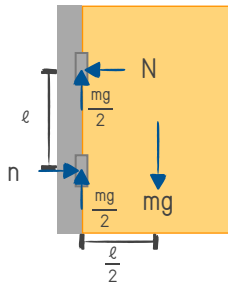
คานมวล m กระจายตัวสม่ำเสมอ ยาว L วางพิงกำแพงสูง h โดยปลายล่างของคานห่างจากฐาน w ถ้ามีจุดมวล M มายึดติดกับคาน ดังกล่าวจากปลายล่างของคานเป็นระยะ ℓ ดังรูปด้านล่าง จงหาแรงที่ขอบกำแพงกระทำกับคานดังกล่าว?



$$\text{Answer : } \frac{(2M\ell + mL)gw}{2L^2}$$

Problem 4.52

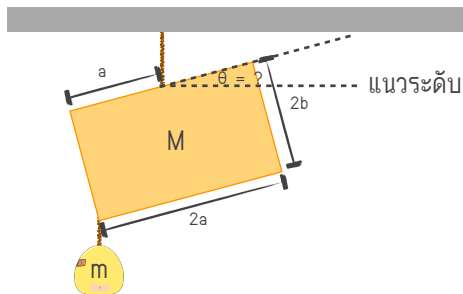
บานประตุมวล m กระจายสม่ำเสมอ จุดศูนย์กลางอยู่ห่างจากบานพับเป็นระยะ $\frac{\ell}{2}$ และบานพับทั้งสองอยู่ห่างกันเป็นระยะ ℓ ดังรูปด้านล่าง จงหาแรงที่บานพับแต่ละตัวกระทำกับประตูดังกล่าว เมื่อบานพับทั้งสองรับน้ำหนักประตูเท่ากัน?



Answer : $\frac{mg}{\sqrt{2}}$

Problem 4.53 Challenge

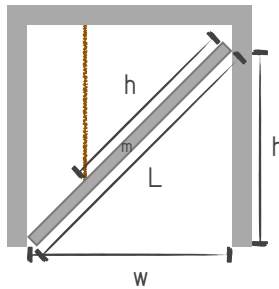
แผ่นสี่เหลี่ยมมวล M ยาว $2a$ กว้าง $2b$ แขนงไว้หนึ่ง โดยมีมวล m มาแขวนไว้ที่มุมของแผ่นสี่เหลี่ยมดังกล่าว ดังรูปด้านล่าง มุม θ เป็นเท่าใด?



Answer : $\tan^{-1}\left(\frac{ma}{(M + 2m)b}\right)$

Problem 4.54

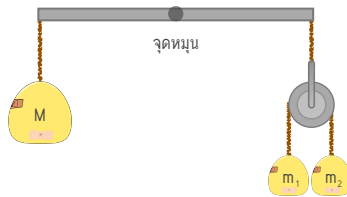
แท่งวัตถุมวล m กระจายสม่ำเสมอ ยาว L ปลายสองข้างติดกำแพง และแขวนโดยเชือกเบา ดังรูปด้านล่าง จงหาแรงที่กำแพงกระทำกับวัตถุดังกล่าว?



$$\text{Answer : } \frac{mgw(2h - L)}{2hL}$$

Problem 4.55 Challenge

คนสม่ำเสมอมีจุดหมุนอยู่ที่กลางคานพอดี ปลายด้านหนึ่งแขวนมวล M ปลายอีกด้านหนึ่งแขวนรอกแบบไร้ความฝืด โดยมีเชือกเบาผูกมวล m_1 และ m_2 ($m_1 > m_2$) คล้องผ่านรอก ดังรูปด้านล่าง จงหามวล M ที่ทำให้คานอยู่ในสมดุลในแนวระดับ?



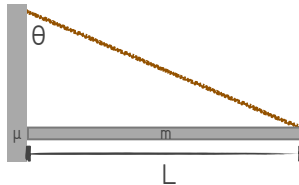
สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

$$\text{Answer : } \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.56

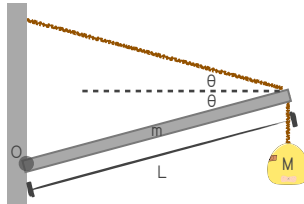
แท่งวัตถุมวล m ยาว L กระจายสม่ำเสมอ ปลายด้านหนึ่งดันกำแพง และปลายอีกด้านหนึ่งผูกไว้กับเชือกเบา ดังรูปด้านล่าง ถ้าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างวัตถุกับกำแพงเท่ากับ μ จงหาขนาดของมุม θ ?



Answer : $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)$

Problem 4.57

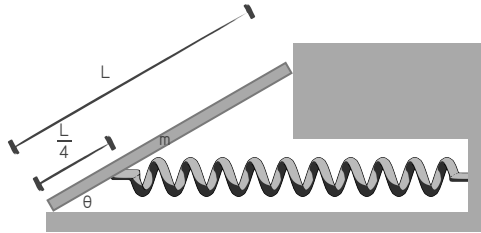
แท่งวัตถุมวล m ยาว L กระจายสม่ำเสมอ ปลายด้านหนึ่งยึดกับกำแพงด้วยบานพับ และปลายอีกด้านหนึ่งผูกกับเชือกเบา และมีมวล M แขวนอยู่ตั้งรูปด้านล่าง จงหาแรงที่บานพับกระทำกับแท่งวัตถุดังกล่าวในแนวดิ่ง?



$$\text{Answer : } \frac{(2M + 3m)g}{4}$$

Problem 4.58 Challenge

คานสม่ำเสมอมวล m ยาว L ยึดติดกับสปริงห่างจากปลายล่างเป็นระยะ $\frac{L}{4}$ ขณะที่คานวางตัวแนวดิ่งสปริงอยู่ในสมดุลพอดี ถ้าคานเอียงทำมุม θ กับแนวนอนทำให้คานอยู่ในสมดุล ดังรูปด้านล่าง (กำแพงและพื้นไม่มีแรงเสียดทาน) จงหาค่าคงที่ของสปริงดังกล่าว?

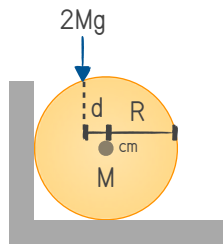


Answer : $\frac{8mg}{9L\sin\theta}$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.59 Challenge

วัตถุทรงกระบอกมวล M รัศมี R มีสัมประสิทธิ์ความเสียดทานเท่ากับ μ ในทุกผิวสัมผัส ออกแรง $2Mg$ กดวัตถุลงมาตามแนวดิ่ง ดังรูปด้านล่าง จงหาระยะ d ที่ทำให้วัตถุเริ่มมีการหมุนเกิดขึ้นพอดี?

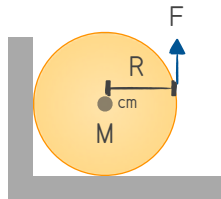


สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

$$\text{Answer : } \frac{3\mu R(1 + \mu)}{2(1 + \mu^2)}$$

Problem 4.60 Challenge

วัตถุทรงกลมมวล M รัศมี R มีสัมประสิทธิ์ความเสียดทานเท่ากับ μ ในทุกผิวสัมผัส ดังรูปด้านล่าง จงหาขนาดแรง F ที่ทำให้วัตถุเริ่มมีการหมุนเกิดขึ้นพอดี?

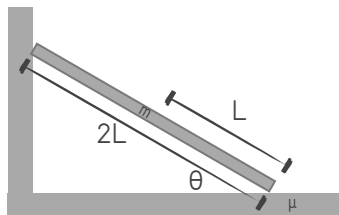


สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

$$\text{Answer : } \frac{(1 + \mu)\mu Mg}{1 + \mu + 2\mu^2}$$

Problem 4.61

คานาสีมาเสมอมวล m ยาว $2L$ วางพิงกำแพง ถ้าประมาณว่ากำแพงไม่มีแรงเสียดทาน และสัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างพื้นกับคานเท่ากับ μ จงหามุม θ ที่ทำให้คานวางตัวอยู่นิ่งได้?



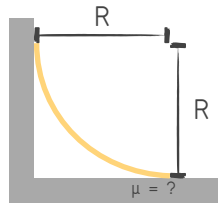
สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Answer : $\cot^{-1}(2\mu)$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

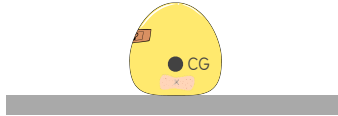
Problem 4.62

เส้นวัตถุโค้ง $\frac{1}{4}$ ของวงกลมรัศมี R มวลกระจายสม่ำเสมอ วางพิงผนังเส้น ดังรูปด้านล่าง สัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างพื้นกับวัตถุต้องมีขนาดน้อยสุดเท่าใด วัตถุจึงจะอยู่นิ่งโดยไม่ไถล?

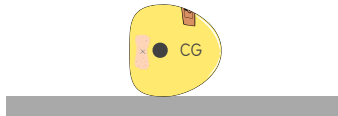


Answer : $\frac{\sqrt{2}}{2}$

เสถียรภาพของวัตถุ (Object Stability)



สมดุลเสถียร (Stable Equilibrium) คือ สภาวะสมดุลที่เมื่อวัตถุเลื่อนตำแหน่งออกจากสมดุลเล็กน้อย วัตถุจะกลับมาสู่สมดุลเดิมได้เอง



สมดุลสะเทิน (Neutral Equilibrium) คือ สภาวะสมดุลที่เมื่อวัตถุเลื่อนตำแหน่งออกจากสมดุลเดิม ก็ยังคงเป็นสมดุลใหม่ที่มีรูปแบบเหมือนกับสมดุลเดิม



สมดุลไม่เสถียร (Unstable Equilibrium) คือ สภาวะสมดุลที่เมื่อวัตถุเลื่อนตำแหน่งออกจากสมดุลเพียงเล็กน้อย วัตถุจะไม่กลับมาสู่สมดุลเดิมได้อีก

ข้อสังเกต

กรณีแนวแรงผ่านศูนย์กลางมวลวัตถุ วัตถุจะเคลื่อนที่โดยไม่หมุน แต่กรณีแนวแรงไม่ผ่านศูนย์กลางมวลวัตถุ วัตถุเคลื่อนที่และหมุนไปพร้อมๆ กัน

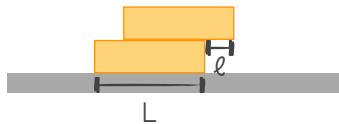
วัตถุจะเริ่มล้มเมื่อแรงแนวฉากกระทำที่ขอบฐานวัตถุพอดี

วัตถุที่อยู่ในสมดุลอาจมีเสถียรภาพต่ำ ถ้าศูนย์กลางของวัตถุอยู่สูง หรือฐานของวัตถุแคบ นั่นแสดงว่าน้ำหนักของวัตถุมีผลต่อเสถียรภาพของวัตถุ

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.63

วัตถุมวลสม่ำเสมอสองแท่ง แต่ละแท่งยาว L และหนักเท่ากันทั้งหมด ถ้าวางแท่งวัตถุบนเหลี่ยมจากแท่งล่างเป็นระยะ ℓ ดังรูปด้านล่าง จงหาระยะ ℓ มากสุดที่แท่งวัตถุสามารถซ้อนกันได้โดยที่แท่งวัตถุบนยังไม่ล้ม?

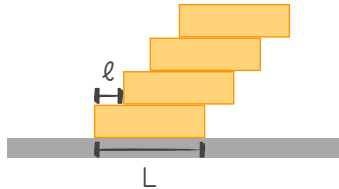


Answer : $\frac{L}{2}$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.64

แท่งวัตถุแต่ละแท่งยาว L และหนักเท่ากันทั้งหมด ถ้าวางแท่งวัตถุเหลื่อมจากแท่งล่างเป็นระยะ ℓ ดังรูปด้านล่าง จงหาจำนวนของแท่งวัตถุมากที่สุดที่สามารถซ้อนกันได้ โดยที่กองของแท่งวัตถุยังไม่ล้ม?



Answer : $\frac{L}{\ell}$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

Problem 4.65

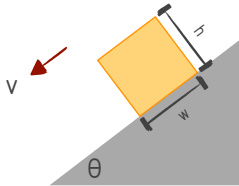
กล่องมวล m กระจายสม่ำเสมอ ฐานกว้าง w สูง h โดยที่ $h > w$ วางอยู่นิ่งในแนวระดับ ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างพื้นกับกล่องดังกล่าวเท่ากับ μ

- a) จะต้องออกแรงดันกล่องในแนวราบขนาดเท่าใด กล่องจึงจะเริ่มเคลื่อนที่?
 b) ต้องออกแรงในข้อ a) สูงจากพื้นเท่าใด กล่องจึงไถลโดยไม่ล้ม?

Answer : a) μmg and b) $\frac{w}{2\mu}$

Problem 4.66

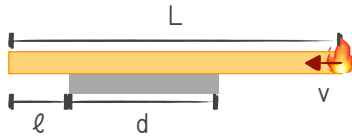
กล่องมวลกระจายสม่ำเสมอ ฐานกว้าง w สูง h เคลื่อนที่ไถลลงตามพื้นเอียงด้วยความเร็วคงที่ ดังรูปด้านล่าง จงหามุมของพื้นเอียงเทียบกับแนวระดับที่ทำให้วัตถุไถลโดยไม่ลื่น?



Answer : $\theta < \tan^{-1}\left(\frac{w}{h}\right)$

Problem 4.67 Challenge

แท่งวัตถุมวลกระจายสม่ำเสมอ ยาว L วางไว้บนฐานยาว d และมีปลายด้านหนึ่งวางออกมาจากฐานเป็นระยะ ℓ โดยที่ $(\ell + d) > \frac{L}{2}$ โดยความยาวทั้งหมดเป็นหน่วย m ดังรูปด้านล่าง ถ้าอัตราการเผาไหม้แท่งวัตถุที่ปลายอีกด้านหนึ่งเท่ากับ v ในหน่วย m/s จุดศูนย์กลางจะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่าใด และแท่งวัตถุจะตกจากฐานที่เวลาเท่าใด?



$$\text{Answer : } |\vec{v}_{cg}| = \frac{v}{2} \text{ and } \Delta t = \frac{L - 2\ell}{v}$$

สมดุลกล (Mechanical Equilibrium)

