

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)



รูปภาพจาก : www.pixabay.com

บทที่ 7 การเคลื่อนที่ในสองมิติ

มีรูปแบบการเคลื่อนที่ของวัตถุที่พบเห็นได้ในชีวิตประจำวันที่มีความน่าสนใจ และพอที่จะอธิบายได้ด้วยความรู้ฟิสิกส์ที่ไม่ซับซ้อนมากนัก นั่นคือ การเคลื่อนที่แบบ โพรเจคไทล์ (Projectile Motion) และการเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอ (Uniform Circular Motion)

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)



การเคลื่อนที่ใน 2 มิติ และ 3 มิติ

แนวคิดที่สำคัญในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ใน 2 และ 3 มิติ คือ การวิเคราะห์แบบแยกองค์ประกอบในแต่ละแกน (วิเคราะห์แบบแยกแกน) และใช้เวลา Δt ร่วมกันในแต่ละแกน

การกระจัด $\vec{r} = \Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}$

ความเร็วเฉลี่ย $\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k}$

ความเร็วขณะหนึ่ง $\vec{v} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$
 $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$

ความเร่งเฉลี่ย $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \hat{k}$

ความเร่งขณะหนึ่ง $\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k}$
 $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$

ข้อสังเกต

ความเร็วจะมีพฤติกรรมเปลี่ยนทิศทางเข้าหาทิศทางของความเร่ง ดังนั้นในกรณีที่วัตถุมีความเร็วขนานกับความเร่ง วัตถุจะเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง แต่ในกรณีที่วัตถุมีความเร็วไม่ขนานกับความเร่ง วัตถุจะเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้ง

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.1

ที่เวลา 0 s วัตถุอยู่ที่จุดกำเนิด และที่เวลา 10.00 s วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง (25.0 m, 25.0 m) ในช่วงเวลา 0 - 10.00 s วัตถุดังกล่าวมีความเร็วเฉลี่ยทำทิศทางเอียงทำมุมเทียบกับแกน x เป็นเท่าใด?

Answer : 45°

Problem 7.2

ในช่วงเวลา 5.00 s วัตถุเคลื่อนที่บนระนาบ xy ด้วยความเร็วเฉลี่ยขนาด 10.0 m/s ทำมุม 37° เทียบกับแกน x ในช่วงเวลาดังกล่าววัตถุมีการกระจัดเป็นเท่าใด?

Answer : $40\hat{i} + 30\hat{j}$ m

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.3

ในช่วงเวลา 7.0 s วัตถุเคลื่อนที่บนระนาบ xy ด้วยความเร็วเฉลี่ยขนาด 14 m/s ทำมุม 45° เทียบกับแกน x ในช่วงเวลาดังกล่าววัตถุมีการกระจัดขนาดเท่าใด?

Answer : 98 m

Problem 7.4

วัตถุเริ่มเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $5.00\hat{i} + 5.00\hat{j}$ m/s เมื่อเวลาผ่านไป 3.00 s วัตถุมีความเร็วเป็น $8.00\hat{i} + 2.00\hat{j}$ m/s จงหาขนาดและมุมเทียบกับแกน x ของความเร่งเฉลี่ยของวัตถุ?

Answer : $|\vec{a}_{av}| = 1.41 \text{ m/s}^2$, $\theta_x = -45.0^\circ$ and $|\Delta\vec{r}| = 98 \text{ m}$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.5

ที่เวลา 1.0 s วัตถุมีความเร็วในแนวแกน +x และมีขนาดเท่ากับ 10 m/s และที่เวลา 3.0 s วัตถุจะมีความเร็วขนาดเท่าใด ถ้าในช่วงเวลาดังกล่าววัตถุมีความเร่งเฉลี่ยขนาดเป็น 5.0 m/s^2 ในทิศ +y?

Answer : 14 m/s

Problem 7.6

วัตถุเคลื่อนที่จากหยุดนิ่งบนระนาบ xy ด้วยความเร่งคงที่ 4.00 m/s^2 ในแกน x และ 2.00 m/s^2 ในแกน y เมื่อเวลาผ่านไป 4.00 s จงหาความเร็วและการกระจัดของวัตถุดังกล่าว?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : $\vec{v} = 16.0\hat{i} + 8.00\hat{j}$ m/s and $\vec{r} = 32.0\hat{i} + 16.0\hat{j}$ m

Problem 7.7

วัตถุเคลื่อนที่ในระนาบ xz ด้วยความเร่งคงที่ โดยเริ่มต้นวัตถุอยู่ที่จุดกำเนิด มีความเร็วในแกน x เท่ากับ 4.00 m/s และมีความเร็วในแกน z เท่ากับ 2.00 m/s เมื่อเวลาผ่านไป 2.00 s วัตถุไปอยู่ที่ตำแหน่ง $(14.0$ m, 0 m, 12.0 m) จงหาขนาดความเร่งของวัตถุดังกล่าว?

Answer : 5.00 m/s²

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.8

วัตถุเคลื่อนที่จากจุดกำเนิดด้วยความเร่งคงที่ขนาด 9.80 m/s^2 ในทิศ $-y$ โดยวัตถุดังกล่าวมีความเร็วต้น $9.80\hat{i} + 9.80\hat{j} \text{ m/s}$ จงหาการกระจัดของวัตถุดังกล่าวขณะที่วัตถุอยู่ในตำแหน่ง $y = 0 \text{ m}$?

Answer : $19.6\hat{i} \text{ m}$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.9

ยิงอนุภาคตัวหนึ่งเคลื่อนที่ไปในแนวดิ่งด้วยความเร็วต้น u ซึ่งอนุภาสดังกล่าวตกอยู่ในสนามโน้มถ่วงทำให้เคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่ a เอียงลงทำมุม θ กับแนวดิ่ง อนุภาสดังกล่าวจะกลับมายังระดับเดียวกับที่ยิง โดยห่างจากจุดที่ยิงเป็นระยะเท่าใด?

$$\text{Answer : } \frac{2u^2 \sin \theta}{a \cos^2 \theta}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.10 Challenge

วัตถุมีเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r} = 4t^2\hat{i} + 5t\hat{j} + 6\hat{k}$ ในหน่วย m

- a) จงหาการกระจัดในช่วง 0 - 4.00 s?
- b) จงหาความเร็วเฉลี่ยในช่วง 0 - 4.00 s?
- c) จงหาความเร็ว ณ เวลา 4.00 s?
- d) จงหาความเร่ง ณ เวลา 4.00 s?

Answer : a) $64.0\hat{i} + 20.0\hat{j}$ m, b) $16.0\hat{i} + 5.00\hat{j}$ m/s,
c) $32.0\hat{i} + 5.00\hat{j}$ m/s and d) $8.00\hat{i}$ m/s²

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.11 Challenge

วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วตามสมการ $\vec{v} = (6t^2 - 8)\hat{i} + 2t\hat{j}$ ในหน่วย m/s โดยที่เวลา $t = 0$ s วัตถุตั้งกล่าวอยู่ที่ตำแหน่ง (0 m, -4.00 m)

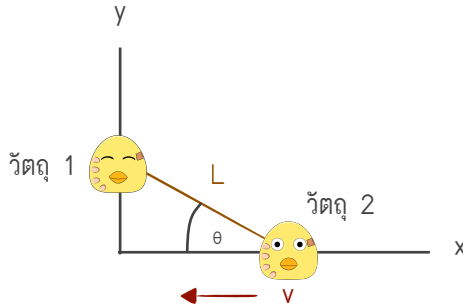
- a) จงหาสมการความเร็วของวัตถุที่เวลาใดๆ?
- b) จงหาสมการตำแหน่งของวัตถุที่เวลาใดๆ?
- c) จงหาความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1.00 - 2.00 s?
- d) จงหาว่าวัตถุจะอยู่บนแกน y พอดีที่เวลาเท่าใด?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : a) $12t\hat{i} + 2\hat{j} \text{ m/s}^2$, b) $(2t^3 - 8t)\hat{i} + (t^2 - 4)\hat{j} \text{ m}$,
 c) $6.00\hat{i} + 3.00\hat{j} \text{ m/s}$ and d) $0, \pm 2.00 \text{ s}$

Problem 7.12 Challenge

วัตถุสองชิ้นเชื่อมต่อกันด้วยแท่งวัตถุเบาๆ ยาว L ซึ่งมีรูปร่างคงตัวตลอดการเคลื่อนที่ ถ้าวัตถุชิ้นที่ 1 ถูกวางไว้บนรางในแกน y และวัตถุชิ้นที่ 2 ถูกวางไว้บนรางในแนวแกน x ในขณะที่วัตถุชิ้นที่ 2 มีความเร็วขนาด v และแท่งวัตถุเอียงทำมุม θ ดังรูปด้านล่าง จงหาว่าวัตถุชิ้นที่ 1 จะมีความเร็วขนาดเท่าใด?

Answer : $v \cot \theta$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.13 Challenge

วัตถุเคลื่อนที่บนระนาบ xy ด้วยความเร่งคงที่ a ตามแนวแกน y และมีสมการเส้นทางการเคลื่อนที่เป็น $y = \alpha x^2 + \beta x$ เมื่อ α และ β เป็นค่าคงที่ซึ่งมากกว่าศูนย์ จงหาอัตราเร็วของวัตถุที่จุดกำเนิด?

Answer : $\sqrt{\frac{(1 + \beta^2)a}{2\alpha}}$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)



ทบทวนการเคลื่อนที่แบบสัมพัทธ์

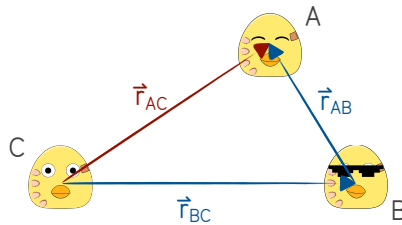
x_{AB} คือ ปริมาณ x ของ A เทียบกับ B (ปริมาณ x ซึ่ง B สังเกต A)

$\vec{r}_{AB}$ คือ ตำแหน่งของ A เทียบกับ B (ตำแหน่งซึ่ง B สังเกต A)

$\Delta \vec{r}_{AB}$ คือ การกระจัดของ A เทียบกับ B (การกระจัดซึ่ง B สังเกต A)

$\vec{v}_{AB}$ คือ ความเร็วของ A เทียบกับ B (ความเร็วซึ่ง B สังเกต A)

$\vec{a}_{AB}$ คือ ความเร่งของ A เทียบกับ B (ความเร่งซึ่ง B สังเกต A)



จากรูปด้านบน จะได้ $\vec{r}_{AC} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BC}$

$$\frac{d\vec{r}_{AC}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BC}}{dt}$$

$$\vec{v}_{AC} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BC}$$

$$\frac{d\vec{v}_{AC}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{AB}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{BC}}{dt}$$

$$\vec{a}_{AC} = \vec{a}_{AB} + \vec{a}_{BC}$$

$\vec{x}_{AB} = -\vec{x}_{BA}$ เนื่องจากเวกเตอร์มีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศตรงข้ามกัน

ในกรณีมีผู้สังเกตเพิ่มขึ้นจะมีความสัมพันธ์ได้เป็น $\vec{x}_{AE} = \vec{x}_{AB} + \vec{x}_{BC} + \vec{x}_{CD} + \vec{x}_{DE}$

Problem 7.14

เรือลำหนึ่งต้องการข้ามแม่น้ำซึ่งกว้าง 200 m จากท่าหน้าในทิศตะวันตกไปยังท่าหน้าในทิศตะวันออก ถ้าเรือดังกล่าวหันหัวเรือชี้ไปทางทิศตะวันออกและทำอัตราเร็วเทียบกับน้ำได้ 4.00 m/s และขณะนั้นกระแสน้ำมีความเร็ว 3.00 m/s ไหลจากทิศเหนือไปยังทิศใต้

- a) คนบนท่าเรือจะเห็นเรือมีอัตราเร็วเท่าใด?
- b) เรือดังกล่าวเคลื่อนที่เอียงทำมุมกับหัวเรือเท่าใด?
- c) เรือจะใช้เวลาเคลื่อนที่ทั้งหมดเท่าใด?

Answer : a) 5.00 m/s, b) 36.9° and c) 50.0 s

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.15

เครื่องบินโดยสารเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเทียบกับอากาศขนาด 900 km/hr ถ้าในขณะนั้นอากาศมีความเร็วขนาด 72 km/hr เคลื่อนที่ตีสองกับเครื่องบินพอดี เครื่องบินลำดังกล่าวจะเคลื่อนที่เอียงทำมุมกับหัวเครื่องบินเท่าใด?

Answer : 4.6°

Problem 7.16

ผู้สังเกตกำลังเคลื่อนที่ในแนวราบด้วยอัตราเร็ว u เทียบกับโลก และสังเกตเห็นว่าฝนตกลงมาทำมุม θ กับแนวดิ่งเข้าหาผู้สังเกต แต่ถ้าผู้สังเกตหยุดนิ่งจะเห็นว่าฝนตกลงมาในแนวดิ่ง จงหาว่าความเร็วของฝนเทียบกับโลกเป็นเท่าใด?

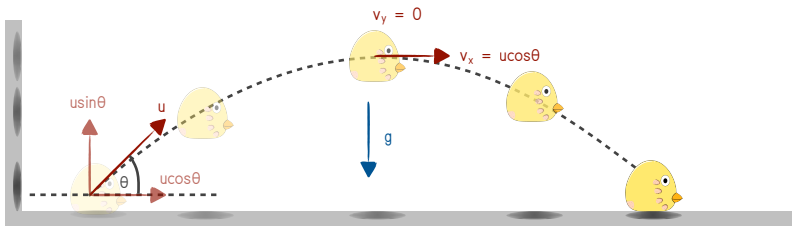
Answer : $u \cot \theta$

การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ (Projectile Motion)



การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ (Projectile Motion)

แนวคิดที่ใช้ในการอธิบายการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ คือ การแยกองค์ประกอบของเวกเตอร์ในแบบเดียวกับการเคลื่อนที่แบบ 2 มิติ ซึ่งการวิเคราะห์แบบแยกองค์ประกอบนี้เหมือนกับเป็นการพิจารณาภาพฉายเงา(Projection) ของเวกเตอร์มายังแกนหลัก (x y และ z)



ในการณีการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์อย่างง่าย (เคลื่อนที่ภายใต้แรงโน้มถ่วงเท่านั้น) เงาของวัตถุบนแกนนอนจะเคลื่อนที่แบบความเร็วคงที่ และเงาของวัตถุบนแกนตั้งจะเคลื่อนที่แบบการตกอย่างอิสระ

ข้อสังเกต

ความเร็วของวัตถุที่จุดสูงสุดของการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์มีค่าไม่เป็นศูนย์ แต่มีค่าเท่ากับความเร็วในแนวระดับ

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

พิจารณาวัตถุเริ่มเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้นขนาด u ทำมุม θ กับแนวระดับ โดยไม่คำนึงถึงแรงต้านอากาศ และกำหนดให้ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกมีขนาดเท่ากับ g และวัตถุตกกลับมาในระดับเดียวกับตอนเริ่มต้นเคลื่อนที่

จาก $v^2 = u^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{r}$

$$v^2 = u^2 + 2(-g\hat{j}) \cdot (0) \quad ; \quad \vec{a} = -g\hat{j} \text{ และ } \vec{r} = 0 \text{ m}$$

$$v^2 = u^2$$

$$v = u$$

$\therefore$ อัตราเร็วขาขึ้นกับขาลงของวัตถุจะเท่ากันที่ระดับความสูงเท่ากัน

จาก $u_y = u \sin \theta$, $u_x = u \cos \theta$, $y = 0$ และ $a = -g$

จาก $y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$

$$0 = ut \sin \theta + \frac{1}{2} (-g) t^2$$

$$t = 0, \frac{2u \sin \theta}{g}$$

$\therefore t = \frac{2u \sin \theta}{g}$

จาก $x = u_x t$

$$x = ut \cos \theta$$

$$x = \frac{2u^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

$$x = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} \quad ; \quad \sin(\theta + \theta) = \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

x จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $\sin 2\theta$ มีค่ามากที่สุด

จะได้ $\sin 2\theta = 1$

$$2\theta = 90^\circ$$

$$\theta = 45^\circ$$

$\therefore$ ยิงวัตถุแบบโพรเจกไทล์ด้วยมุม 45° วัตถุจะไปตกไกลสุดที่ระดับเดียวกับที่เริ่มยิงวัตถุนั้น

พิจารณาการยิงวัตถุที่ระดับเดียวกัน ด้วยอัตราเร็วเริ่มต้น u เท่ากัน แต่ยิงด้วยมุมต่างกัน คือ θ_1 และ θ_2 ภายใต้เงื่อนไข $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \text{จาก } x_1 &= \frac{u^2 \sin 2\theta_1}{g} \\ x_1 &= \frac{u^2 \sin 2(90^\circ - \theta_2)}{g} & ; \theta_1 + \theta_2 = 90^\circ \\ x_1 &= \frac{u^2 \sin(180^\circ - 2\theta_2)}{g} \\ x_1 &= \frac{u^2 (\sin(180^\circ) \cos(2\theta_2) - \sin(2\theta_2) \cos(180^\circ))}{g} \\ x_1 &= \frac{u^2 \sin 2\theta_2}{g} \\ x_1 &= x_2 & ; x = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} \end{aligned}$$

$\therefore$ ยิงวัตถุแบบโพรเจกไทล์ด้วยมุมที่มีผลรวมเท่ากับ 90° วัตถุจะไปตกที่ระยะเท่ากันในระดับแนวที่ยิงวัตถุ

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

ข้อสังเกต

ความเร็วของวัตถุที่จุดสูงสุดของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์มีค่าไม่เป็นศูนย์ แต่มีค่าเท่ากับความเร็วในแนวระดับ

การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ อัตราเร็วขาขึ้นกับหางของวัตถุจะเท่ากันที่ระดับความสูงเท่ากัน

ยิงวัตถุแบบโพรเจกไทล์ด้วยมุม 45° วัตถุจะไปตกไกลสุดที่ระดับแนวที่ยิงวัตถุเท่านั้น ถ้าเป็นระยะที่สูงกว่าหรือต่ำกว่าระดับแนวที่ยิงวัตถุ วัตถุจะตกไกลสุดที่มุมยิงที่ไม่ใช่ 45°

ยิงวัตถุแบบโพรเจกไทล์ด้วยมุมที่มีผลรวมเท่ากับ 90° วัตถุจะไปตกที่ระยะเท่ากันในระดับแนวที่ยิงวัตถุ แต่อาจใช้เวลาในการเคลื่อนที่ไม่เท่ากัน

Problem 7.17

โยนวัตถุด้วยความเร็วต้นขนาด u ทำมุม θ กับแนวระดับ ที่จุดสูงสุดของการเคลื่อนที่ วัตถุจะมีความเร็วเป็นเท่าใด?

Answer : $u \cos \theta$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.18

ปาวัตถุออกไปด้วยความเร็วต้น u โดยทำมุม θ กับแนวดิ่ง ถ้าพิจารณาวัตถุเคลื่อนที่ภายใต้แรงโน้มถ่วงเท่านั้น เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ไปถึงจุดสูงสุด วัตถุจะมีขนาดความเร่ง และขนาดความเร็วเป็นเท่าใด?

Answer : $|a| = g$ and $|v| = u \sin \theta$

Problem 7.19

โยนวัตถุจากหน้าผาด้วยเอียงขึ้น 30° เทียบกับแนวนอน เพื่อให้โดนเป้าหมายซึ่งมองเห็นได้จากมุมที่ตกลง 45° เทียบกับแนวนอน ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ไปยังเป้าหมายภายในเวลา 10 s และความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกเท่ากับ 10 m/s^2 จงหาขนาดความเร็วต้นของวัตถุดังกล่าว?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

$$\text{Answer : } \frac{100}{1 + \sqrt{3}} \text{ m/s}$$

Problem 7.20

ยิงวัตถุด้วยความเร็วต้น 22.4 m/s ออกไปจากยอดตึกซึ่งสูงจากพื้น 102 m โดยยิงทำมุม 37.0° กับแนวนอน

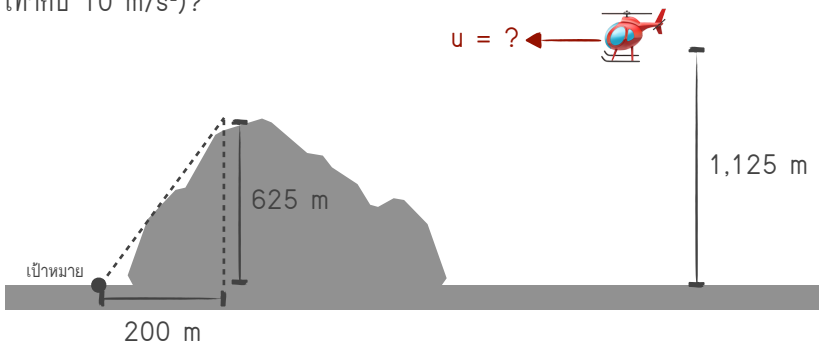
- วัตถุจะตกถึงพื้นไกลจากยอดตึกเท่าใด?
- วัตถุจะตกถึงพื้นด้วยความเร็วขนาดเท่าใด?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : a) 150 m and b) 50.0 m/s

Problem 7.21

เครื่องบินเคลื่อนที่ในแนวนอนด้วยความเร็วคงที่สูงจากพื้น 1,125 m พบเป้าหมายอยู่หลังเขาสูงชัน ดังรูปด้านล่าง ความเร็วของเครื่องบินดังกล่าวต้องมีขนาดเท่าใดจึงจะส่งวัตถุไปยังเป้าหมายได้พอดี (กำหนดให้ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกเท่ากับ 10 m/s^2)?



การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : 40 m/s

Problem 7.22

ขว้างวัตถุทำมุม 45° เทียบกับแนวนอนระดับ ปรากฏว่าวัตถุเคลื่อนที่ข้ามกำแพงซึ่งสูง 10 m ซึ่งอยู่ห่างจากตำแหน่งที่ขว้างวัตถุเป็นระยะ 60 m ได้พอดี จุดสูงสุดในการเคลื่อนที่ของวัตถุดังกล่าวอยู่สูงจากพื้นเท่าใด (กำหนดให้ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก เท่ากับ 10 m/s^2)?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : 18 m



การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.23

วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น $u_x \hat{i} + u_y \hat{j}$ จงแสดงว่าเมื่อวัตถุเคลื่อนที่กลับมาในแนวระดับเดิมกับตำแหน่งเริ่มต้น วัตถุจะอยู่ห่างจากตำแหน่งเริ่มต้นเป็นระยะ $x = 2u_x u_y / g$?

Problem 7.24

วัตถุเคลื่อนที่จากพื้นโดยมีผลคูณของความเร็วต้นในแกน x และแกน y เท่ากับ $96.04 \text{ m}^2/\text{s}^2$ เมื่อวัตถุตกกลับมายังพื้น วัตถุจะอยู่ห่างจากตำแหน่งเริ่มต้นเคลื่อนที่เท่าใด?

Answer : 19.60 m

Problem 7.25

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้นขนาด u ทำมุม θ กับแนวระดับ ภายใต้ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกขนาด g จงแสดงว่าการกระจัดตามแนวดิ่ง (y) สัมพันธ์กับการกระจัดตามแนวราบ (x) ตามสมการ $y = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \theta}$?

$$\text{Answer : } x \tan \theta - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \theta}$$

Problem 7.26

ในการโยนวัตถุขึ้นไปด้วยความเร็วเท่ากันแต่มีมุมเทียบกับแนวระดับต่างกัน 3 มุม คือ 15° , 60° และ 80° ถ้าวัตถุตกกลับมายังระดับเดียวกับที่โยนออกไป จงเรียงลำดับมุมที่ทำให้ระยะห่างระหว่างจุดเริ่มโยนกับจุดที่วัตถุตกลงมาจากน้อยไปมาก?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : $x_{80^\circ} < x_{15^\circ} < x_{60^\circ}$

Problem 7.27

วัตถุสองชิ้นถูกยิงขึ้นไปด้วยความเร็วขนาด u เท่ากัน โดยชิ้นที่ 1 ยิงทำมุม θ เทียบกับแนวนอน และชิ้นที่ 2 ยิงทำมุม $90^\circ - \theta$ เทียบกับแนวนอน ถ้า h_1 และ h_2 เป็นระยะสูงสุดในการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่ 1 และ 2 ตามลำดับ จงหา $h_1 : h_2$?

Answer : $\tan^2 \theta$

Problem 7.28

ขว้างวัตถุขึ้นไปในแนวดิ่งได้ระยะสูงสุด cg เมื่อ c คือ ค่าคงที่ซึ่งมากกว่าศูนย์ ถ้าขว้างวัตถุเดิมด้วยความเร็วต้นขนาดเท่าเดิม โดยขว้างแบบพาราโบล่า วัตถุจะตกถึงพื้นไกลสุดเป็นระยะเท่าใด?

Answer : $2cg$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.29

ต้องขว้างวัตถุแบบโปรเจกไทล์ด้วยความเร็วน้อยสุดขนาดเท่าใด เพื่อให้วัตถุตกถึงพื้นในระดับเดียวกับที่ขว้างวัตถุและไกลจากตำแหน่งที่ขว้างเป็นระยะ cg เมื่อ c คือค่าคงที่ซึ่งมากกว่าศูนย์?

Answer : $g\sqrt{c}$

Problem 7.30

คันวัตถุมวล 100 g กดสปริงซึ่งมีค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ 1,000 N/m เป็นระยะ 5.00 cm ณ จุดดังกล่าววัตถุอยู่สูงจากระดับพื้นเท่ากับ 35.0 cm เมื่อปล่อยวัตถุทำให้สปริงดีดวัตถุออกจากรางลื่นซึ่งเอียงทำมุม 30° กับแนวระดับ ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ในรางเป็นระยะเท่ากับระยะที่กดสปริงเข้าไปพอดี การกระจัดของวัตถุจากจุดที่เริ่มปล่อยวัตถุจนวัตถุถึงพื้นมีขนาดเป็นเท่าใด?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : 2.75 m

Problem 7.31

ถ้าไม่คิดแรงต้านอากาศ ต้องโยนวัตถุแบบโปรเจกไทล์ทำมุมเท่าใดกับแนวนอน เพื่อให้วัตถุเคลื่อนที่โดยมีระยะห่างในแนวนอนเท่ากับ x และระยะสูงสุดในแนวดิ่งเท่ากับ h เมื่อตำแหน่งที่เริ่มโยนวัตถุกับตำแหน่งที่วัตถุตกถึงพื้นอยู่ในระดับเดียวกันพอดี?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

$$\text{Answer : } \tan^{-1}\left(\frac{4h}{x}\right)$$

Problem 7.32

ถ้าไม่คิดแรงต้านอากาศ ต้องโยนวัตถุแบบโปรเจกไทล์ทำมุมเท่าใดกับแนวนอน เพื่อให้วัตถุเคลื่อนที่โดยมีระยะสูงสุดในแนวดิ่งเท่ากับระยะห่างในแนวนอน เมื่อตำแหน่งที่เริ่มโยนวัตถุกับตำแหน่งที่วัตถุตกถึงพื้นอยู่ในระดับเดียวกันพอดี?

$$\text{Answer : } 76^\circ$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.33

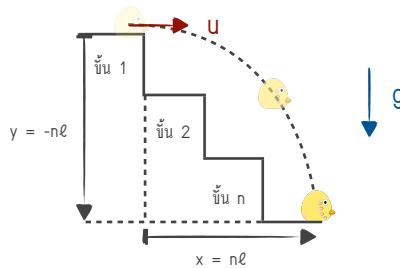
กำแพงสูง 10 m และอยู่ห่างจากจุดที่โยนวัตถุเป็นระยะ 20 m จะต้องโยนวัตถุด้วยความเร็วต้นขนาดเท่าใด เพื่อให้วัตถุข้ามกำแพงดังกล่าวได้พอดี?

Answer : $\sqrt{40g}$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.34

ยิงวัตถุออกไปในแนวระดับด้วยความเร็วต้น u จากบนสุดของบันได โดยบันไดแต่ละขั้นกว้าง ℓ และสูง ℓ ดังรูปด้านล่าง จงหาว่าวัตถุจะตกกระทบกับบันไดครั้งแรกคือขั้นที่เท่าใด?



$$\text{Answer : } \frac{2u^2}{g\ell}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.35

ยิงวัตถุด้วยความเร็วต้นขนาด u ทำมุม θ กับแนวระดับ ห่างจากต้นไม้เป็นระยะ ℓ ถ้าต้องการให้วัตถุนี้ข้ามต้นไม้ไปได้ ต้นไม้ดังกล่าวจะต้องสูงไม่เกินเท่าใด?

$$\text{Answer : } \ell \tan \theta - \frac{g \ell^2}{2u^2 \cos^2 \theta}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

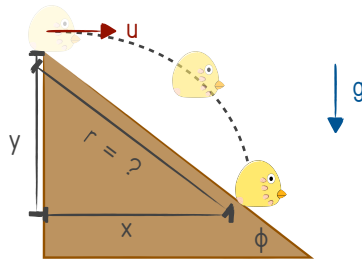
Problem 7.36

ขว้างวัตถุให้เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ พบว่าอัตราเร็วที่จุดสูงสุดเท่ากับ $\sqrt{\frac{2}{5}}$ เท่า
 ของอัตราเร็วเมื่อวัตถุอยู่ที่ครึ่งหนึ่งของความสูงที่สุดของการเคลื่อนที่ ต้องขว้างวัตถุตั้ง
 กล่าวเท่ามุมเท่าใดเทียบกับแนวระดับ?

Answer : 60°

Problem 7.37

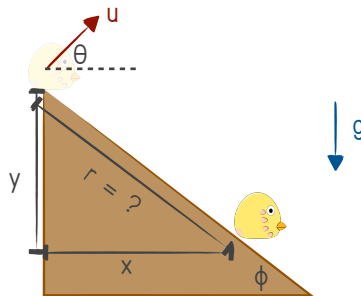
ยิงวัตถุออกไปด้วยความเร็วต้น u ในแนวระดับจากยอดของพื้นเอียงซึ่ง สูงมากๆ ถ้าพื้นเอียงดังกล่าวเอียงทำมุม ϕ กับแนวระดับดังรูปด้านล่าง จงหาว่าวัตถุจะ ตกกระทบพื้นเอียงห่างจากจุดที่ยิงวัตถุออกไปเป็นระยะเท่าใด?



$$\text{Answer : } \frac{2u^2 \tan \phi}{g \cos \phi}$$

Problem 7.38

ยิงวัตถุออกไปจากยอดของพื้นเอียงซึ่งสูงมากๆ ด้วยความเร็วต้น u ทำมุม θ เทียบกับ ถ้าพื้นเอียงดังกล่าวเอียงทำมุม ϕ กับแนวระดับดังรูปด้านล่าง จงหาว่าวัตถุจะ ตกกระทบพื้นเอียงห่างจากจุดที่ยิงวัตถุออกไปเป็นระยะเท่าใด?

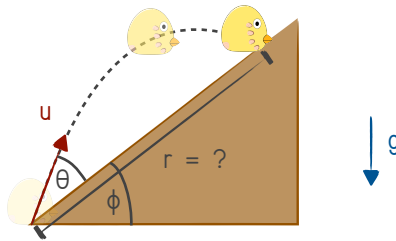


$$\text{Answer : } \frac{2u^2(\tan\phi + \tan\theta)}{g\cos\phi}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.39

ยิงวัตถุด้วยความเร็วต้น u ทำมุม θ กับแนวพื้นเอียง และพื้นเอียงดังกล่าวทำมุม ϕ กับแนวระดับดังรูปด้านล่าง จงหาว่าวัตถุจะตกบนพื้นเอียงห่างจากจุดที่เริ่มยิงวัตถุเป็นระยะเท่าใด?



$$\text{Answer : } \frac{2u^2 \sin \theta (\cos \theta - \sin \theta \tan \phi)}{g \cos \phi}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.40

เชือกเพลิงทำให้วัตถุเริ่มเคลื่อนที่จากหยุดนิ่งด้วยความเร่งคงที่ a และทำมุม θ กับแนวนอน หลังจากผ่านไปเป็นเวลา t เชือกเพลิงได้หมดลง วัตถุดังกล่าวจะเคลื่อนที่ไปได้สูงสุดเท่าใด?

$$\text{Answer : } \frac{at^2 \sin \theta (g + a \sin \theta)}{2g}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.41

ยิงวัตถุขึ้นที่ 1 จากพื้นราบด้วยความเร็วต้น u ทำมุม θ เทียบกับพื้นราบ ไปยังวัตถุอีกชิ้นที่ 2 ซึ่งอยู่ห่างเป็นระยะ l และกำลังเคลื่อนที่ตรงเข้ามาตามพื้นราบด้วยความเร็วคงที่ ถ้าวัตถุชิ้นที่ 1 ชนกับวัตถุชิ้นที่ 2 พอดี ความเร็วของวัตถุชิ้นที่ 2 ก่อนโดนชนมีขนาดเป็นเท่าใด?

$$\text{Answer : } \frac{gl - u^2 \sin 2\theta}{2u \sin \theta}$$

Problem 7.42

วัตถุชิ้นที่ 1 เคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น u โดยเอียงทำมุม θ เทียบกับพื้น และวัตถุชิ้นที่ 2 เคลื่อนที่จากหยุดนิ่งมาตามพื้นด้วยความเร่งคงที่ ถ้าวัตถุทั้งสองชิ้นมาชนกันพอดี ถ้าเริ่มต้นวัตถุชิ้นที่ 1 และวัตถุชิ้นที่ 2 ห่างกันเป็นระยะเท่ากับ l ขนาดความเร่งของวัตถุชิ้นที่ 2 เป็นเท่าใด?

$$\text{Answer : } \frac{g(gl - 2u^2 \sin \theta \cos \theta)}{2u^2 \sin^2 \theta}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.43

วัตถุชิ้นที่ 1 ถูกปล่อยลงมาจากความสูง $2h$ พร้อมกับวัตถุชิ้นที่ 2 ที่ถูกขว้างขึ้นไปจากความสูง h ด้วยความเร็วต้นขนาด u และเอียงทำมุม θ กับแนวระดับ ถ้าวัตถุทั้งสองตกถึงพื้นพร้อมกัน จงหาเวลาที่วัตถุทั้งสองใช้ในการเคลื่อนที่ ในรูปของ u , θ และ g ?

Answer : $\frac{4u \sin \theta}{g}$

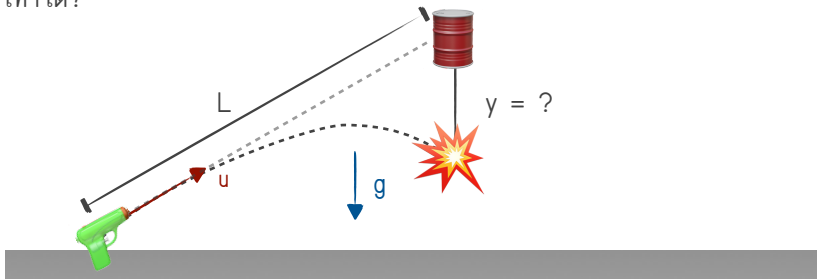
Problem 7.44

วัตถุสองชิ้นอยู่ห่างกัน L ถูกยิงเข้าหากัน โดยวัตถุชิ้นที่หนึ่งถูกยิงด้วยความเร็วขนาด u_1 เที่ยงทำมุม θ_1 กับแนวระดับ และวัตถุชิ้นที่สองถูกยิงด้วยความเร็วขนาด u_2 เที่ยงทำมุม θ_2 กับแนวระดับ ถ้าวัตถุทั้งสองถูกยิงจากระดับเดียวกันและออกมาพร้อมกันพอดี นับตั้งแต่เริ่มยิงจนวัตถุทั้งสองชนกันจะต้องใช้เวลาในการเคลื่อนที่เท่าใด?

$$\text{Answer : } \frac{L}{u_1 \cos \theta_1 + u_2 \cos \theta_2}$$

Problem 7.45

เล็งปืนเป็นแนวเส้นตรงไปยังกระป๋องซึ่งอยู่ห่างออกไปเป็นระยะ L ดังรูปด้านล่าง เมื่อเริ่มยิงปืนความเร็วต้นเท่ากับ u กระป๋องนั้นได้ร่วงลงมาทันที ถ้าการยิงดังกล่าวทำให้ลูกกระสุนปืนเข้าชนกับกระป๋องพอดี ลูกปืนจะชนเมื่อกระป๋องร่วงลงมาเป็นระยะเท่าใด?



การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

$$\text{Answer : } \frac{gL^2}{2u^2}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

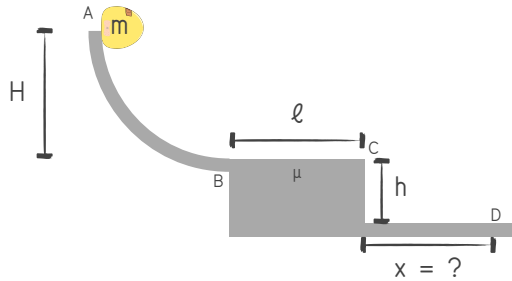
Problem 7.46

เครื่องบินยิงวัตถุออกไปตามแนวราบด้วยอัตราเร็ว 10 m/s เมื่อวัตถุถึงจุดที่ 1 มีความเร็วขนาด 20 m/s เมื่อวัตถุถึงจุดที่ 2 มีความเร็วขนาด 30 m/s อัตราส่วนความเร็วในแนวดิ่งของวัตถุในจุดที่ 2 ต่อจุดที่ 1 เป็นเท่าใด?

Answer : $2\sqrt{\frac{2}{3}}$

Problem 7.47

ปล่อยวัตถุมวล m เคลื่อนที่จากจุด A ลงมาตามพื้นลื่นถึงจุด B และเคลื่อนที่จากจุด B ไปยังจุด C ซึ่งมีสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์เท่ากับ μ และเคลื่อนที่จากจุด C ไปยังจุด D ดังรูปด้านล่าง ระยะ x เป็นเท่าใด?



Answer : $\sqrt{h(H - \mu l)}$

Problem 7.48

สปริงเบายึดติดกับกำแพงและวางตัวในแนวราบบนหน้าผาลื่นไร้แรงเสียดทานซึ่งสูงจากพื้นด้านล่างเป็นระยะ h เมื่อกดสปริงเข้าไปเป็นระยะ x_1 สปริงจะดันวัตถุให้ตกห่างจากฐานหน้าผาเป็นระยะ L ถ้าต้องการให้วัตถุตกห่างจากเดิมเพิ่มขึ้นอีก ℓ จะต้องกดสปริงเป็นระยะเท่าใด?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

$$\text{Answer : } \frac{x_1(L + \ell)}{L}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.49

วัตถุมวล 10.0 kg ถูกปล่อยให้ตกลงจากหน้าผาสูง 19.6 m โดยในขณะที่วัตถุกำลังตกลงมาได้มีกระแสลมทำให้เกิดแรงคงที่ขนาด 56.6 N ในแนวระดับ วัตถุจะถึงพื้นห่างจากขอบหน้าผาเป็นระยะเท่าใด?

Answer : 22.6 m

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.50

วัตถุมวล m ตกจากหน้าผาสูงมีลมพัดทำให้เกิดแรงคงที่ขนาด F ในทิศเอียงลงทำมุม θ กับแนวระดับ จงหาอัตราส่วนของระยะการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง (y) ต่อระยะการเคลื่อนที่ในแนวราบ (x) ของวัตถุดังกล่าว?

$$\text{Answer : } \frac{F \sin \theta + mg}{F \cos \theta}$$

Problem 7.51

วัตถุมวล m แขนงด้วยเชือกเบายาว l ทำการดึงมวล m ให้เชือกตึงและสูงจากโต๊ะเป็นระยะ H เมื่อปล่อยมวล m ทำให้มวล m เข้าชนมวล M ซึ่งอยู่นิ่งที่ขอบโต๊ะ โดยขณะที่ชน มวล m อยู่ในจุดต่ำสุดพอดี หลังการชนปรากฏว่ามวล m แกว่งกลับขึ้นมาสูง h และมวล M กระเด็นตกถึงพื้นห่างจากขาโต๊ะเป็นระยะ H ถ้าโต๊ะดังกล่าวสูงจากพื้นเป็นระยะ H การชนดังกล่าวเกิดการสูญเสียพลังงานเท่าใด?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

$$\text{Answer : } \frac{g((4m - M)H - 4mh)}{4}$$

Problem 7.52

ยิงวัตถุมวล 4.0 kg ด้วยความเร็วต้น 50 m/s ทำมุม 37° กับแนวนอน เมื่อวัตถุขึ้นไปถึงจุดสูงสุดจึงเกิดการระเบิดออกเป็น 2 ส่วน ส่วนแรกมีมวล 3.0 kg มีความเร็วตามแนวราบด้วยความเร็วขนาด 30 m/s และส่วนที่สองมีมวล 1.0 kg จะมีความเร็วขนาดเท่าใด?

$$\text{Answer : } 70 \text{ m/s}$$

Problem 7.53

ยิงวัตถุด้วยความเร็วต้น u ทำมุม θ กับแนวระดับ เมื่อขึ้นไปถึงจุดสูงสุด วัตถุได้ระเบิดออกเป็นสองชิ้นซึ่งมีมวลขนาดเท่ากัน ถ้าชิ้นที่หนึ่งตกลงมาในแนวตั้งพอดี และชิ้นที่สองเคลื่อนที่ต่อไปในแนวระดับ ชิ้นที่สองจะตกถึงพื้นห่างจากจุดที่เริ่มยิงวัตถุเท่าใด?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

$$\text{Answer : } \frac{3u^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.54

ถ้านกกำลังคาบหนอนบินไปตามแนวราบความเร็วคงที่ v ทันทีเมื่อได้ยินเสียงปืน
นกดังกล่าวเกิดตกใจอาปากจนหนอนร่วงลงมา แต่นกยังคงบินต่อไปด้วยความเร็วคงที่

- นกจะเห็นหนอนเคลื่อนที่อย่างไร?
- หนอนจะเห็นนกเคลื่อนที่อย่างไร?
- คนซึ่งอยู่นิ่งบนโลกจะเห็นหนอนเคลื่อนที่อย่างไร?

Answer : a) นกจะเห็นหนอนเคลื่อนที่แบบตกอย่างอิสระจากหยุดนิ่ง,

b) หนอนจะเห็นนกเคลื่อนที่ขึ้นจากหยุดนิ่งด้วยความเร่งคงที่ g

and c) คนซึ่งอยู่นิ่งบนโลกจะเห็นหนอนเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์อย่างง่ายด้วย
ความเร็วต้น v ขนานกับพื้นโลก

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.55

เด็กคนหนึ่งโยนวัตถุด้วยความเร็วต้น 20 m/s โดยเอียงทำมุม 60° กับแนวนระดับ เด็กคนดังกล่าวจะต้องวิ่งในแนวนระดับด้วยความเร็วคงที่เท่าใดจึงจะรับวัตถุได้พอดีก่อนที่วัตถุจะตกถึงพื้น?

Answer : 10 m/s

Problem 7.56

รถคันหนึ่งเคลื่อนที่บนพื้นราบด้วยความเร่งคงที่ และยิงวัตถุทำมุม θ เทียบกับแนวนราบ (เมื่อสังเกตจากรถคันดังกล่าว) ปรากฏว่าวัตถุดังกล่าวตกกลับมาที่รถได้พอดี จงหาขนาดความเร่งของรถดังกล่าว?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : $g \cot \theta$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.57

ลูกโป่งกำลังเคลื่อนที่ขึ้นจากพื้นด้วยความเร็วคงที่ขนาด 4.90 m/s เมื่อลูกโป่งเคลื่อนที่ไป 2.00 s ได้มีระเบิดขนาดเล็กหลายๆ ลูกดีดออกมาในแนวระดับด้วยความเร็วขนาด 7.76 m/s ขณะที่ระเบิดดังกล่าวตกถึงพื้น ลูกโป่งจะอยู่ห่างจากระเบิดเท่าใด?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : 25.0 m

Problem 7.58

เครื่องบินลำหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่ เอียงลงทำมุม 53.0° กับแนวดิ่ง วัตถุหนึ่งหลุดลงมาขณะที่เครื่องบินอยู่สูงจากพื้น 730 m วัตถุนี้เคลื่อนที่เป็นเวลา 5.00 s จึงตกถึงพื้น จงหาอัตราเร็วของเครื่องบินและวัตถุ ขณะที่วัตถุกระทบพื้น?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : อัตราเร็วของเครื่องบินเท่ากับ 202 m/s

and อัตราเร็วของวัตถุเท่ากับ 235 m/s

Problem 7.59

ข้อมูลจากภาพในคลิปพบว่านกตัวหนึ่งบินขนานกับพื้นราบสูงจากพื้น H ด้านดั่งกล่าวค่อยๆ ย่อยถ้ำมูลลงมาที่ละก้อนในระยะเท่าๆ กัน ปรากฏว่ามูลก้อนแรกตกถึงพื้นราบพร้อมกับมูลก้อนที่สองได้ตกใส่หัวเด็กผู้โชคดีและมูลก้อนที่ N กำลังออกจากกันนดั่งกล่าวพอดี จงหาว่าเด็กผู้โชคดียังกล่าวสูงเท่าใด?

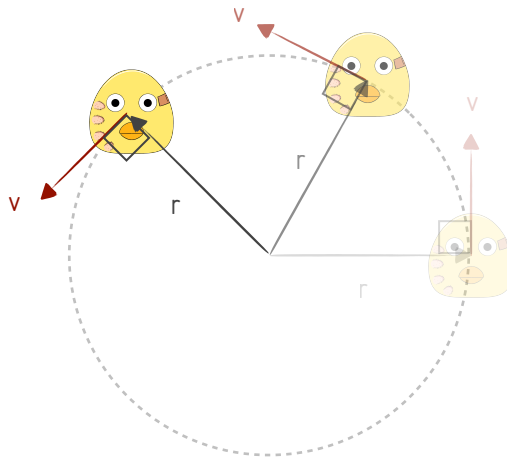
การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

$$\text{Answer : } H(1 - (\frac{N - 2}{N - 1})^2)$$

การเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอ (Uniform Circular Motion)

การเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอวัตถุจะมีรัศมีคงที่ r มีอัตราเร็วหรือขนาดของความเร็วคงที่ v แต่ความเร็วของวัตถุจะไม่คงที่เนื่องจากการเปลี่ยนทิศทางตลอดเวลา โดยความเร็วของวัตถุซึ่งเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอจะตั้งฉากกับแนวรัศมีของวัตถุ (มีทิศอยู่ในแนวเส้นสัมผัสของวงกลม) ดังรูปด้านล่าง



คาบ ความถี่ และอัตราเร็ว

คาบ (Period ; T [s]) คือ ช่วงเวลาที่ใน 1 รอบของกิจกรรมที่สนใจ

ความถี่ (Frequency ; f [Hz, s^{-1}]) คือ จำนวนรอบของกิจกรรมที่สนใจใน 1 ช่วงเวลา

จากความหมายของคาบและความถี่ จะได้ $f = \frac{1}{T}$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

อัตราเร็วของวัตถุซึ่งเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอได้

$$v = \frac{\text{ระยะทางใน 1 รอบ}}{\text{เวลาในการเคลื่อนที่ 1 รอบ (คาบ)}} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$$

r คือ รัศมีในการเคลื่อนที่ของวัตถุ

ข้อสังเกต

แกว่งเชือกติดกับวัตถุให้เคลื่อนที่เป็นวงกลม ถ้าเชือกขาดวัตถุจะเคลื่อนที่ต่อไปในแนวสัมผัสกับเส้นโค้งของวงกลม ณ ตำแหน่งที่เชือกขาด



Problem 7.60

วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมแบบสม่ำเสมอรัศมี 7.00 m ด้วยอัตราเร็วคงที่ 11.0 m/s วัตถุนี้จะมีคาบและความถี่ในการเคลื่อนที่เป็นเท่าใด?

Answer : $T = 4.00 \text{ s}$ and $f = 0.25 \text{ Hz}$



Problem 7.61

วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมสม่ำเสมอรัศมี R บนระนาบ xy โดยมีจุดกำเนิดเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และหมุนทวนเข็มนาฬิกาไปรอบๆ จุดกำเนิดดังกล่าว ในขณะที่วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง $(0, R)$ ความเร็วของวัตถุจะมีทิศทางเป็นเช่นไร?

Answer : $-\hat{i}$

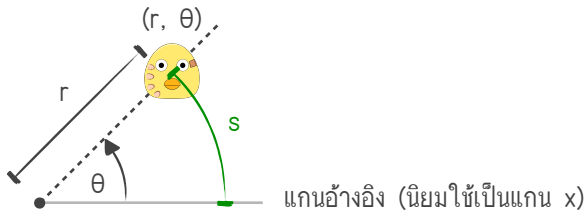


การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)



มุม และอัตราเร็วเชิงมุม

การเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอ นั้นอาจสะดวกมากขึ้นเมื่อใช้มุมมองในเชิงมุม หรือระบบพิกัดแบบเชิงขั้ว (Polar Coordinate System) ซึ่งบอกตำแหน่งของวัตถุเป็นระยะห่างจากจุดกำเนิด r และมุมกวาดทวนเข็มนาฬิกาเทียบกับแกนอ้างอิง θ ดังรูปในหน้าต่อไป



จากรูปด้านบน นิยามมุม (Angular ; θ [rad (ไม่มีมิติ)]) ดังนี้

$$\theta = \frac{s}{r}$$

θ คือ มุม โดย หน่วยเรเดียน (Radian [rad]) เทียบได้ว่า $\pi \text{ rad} = 180^\circ$

s คือ ความยาวของส่วนเส้นโค้งของวงกลม

r คือ รัศมีของวงกลม

นิยาม อัตราเร็วเชิงมุม (Angular Speed ; ω [rad/s, Hz, s^{-1}]) ดังนี้

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

พิจารณาการเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอ ณ เวลาใดๆ

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\omega = \frac{ds}{r dt}$$

จาก $v = \frac{ds}{dt}$ จะได้

$$\omega = \frac{v}{r} \quad \text{หรือ} \quad v = \omega r$$

พิจารณาการเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอในหนึ่งรอบการเคลื่อนที่

$$\omega_{av} = \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Problem 7.62

วัตถุเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอด้วยอัตราเร็วเชิงมุม 10π rad/s เมื่อเวลาผ่านไป 0.25 s วัตถุจะหมุนไปเป็นมุมเท่าใดในหน่วยองศา?

Answer : 450°

Problem 7.63

วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมแบบสม่ำเสมอด้วยความถี่ 150 รอบต่อนาที จงหาอัตราเร็วเชิงมุมของวัตถุดังกล่าว?

Answer : 15.7 rad/s

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.64

วัตถุเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอด้วยรัศมี 0.35 m และอัตราเร็วเชิงมุม 0.55π rad/s เมื่อเวลาผ่านไป 10 s วัตถุดังกล่าวจะเคลื่อนที่เป็นระยะทางเท่าใด?

Answer : 6.0 m

Problem 7.65

วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมสม่ำเสมอด้วยอัตราเร็วเชิงมุม 50 rad/s ถ้าวางกลดังกล่าวนีรัศมี 0.24 m วัตถุดังกล่าวจะมีอัตราเร็วเท่าใด?

Answer : 12 m/s

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

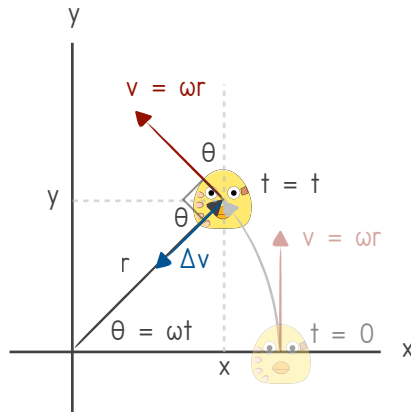
Problem 7.66

วัตถุเคลื่อนเป็นวงกลมสม่ำเสมอบนระนาบ xy ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω รอบจุดกำเนิด โดยหมุนตามเข็มนาฬิกา ถ้าวงกลมดังกล่าวมีรัศมี r แกน x คือแนวระดับ และแกน y คือแนวตั้ง ซึ่งมีค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกเท่ากับ g ปรากฏว่าเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ไปถึงตำแหน่ง $(0, r)$ วัตถุได้หลุดออกจากแนววงกลมดังกล่าว เมื่อวัตถุตกลงมาที่ตำแหน่ง $y = 0$ m วัตถุจะอยู่ไกลจากจุดที่เริ่มหลุดจากวงกลมเป็นระยะเท่าใด?

$$\text{Answer : } r\sqrt{1 + \frac{2\omega^2 r}{g}}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

พิจารณาความเร่งของวัตถุซึ่งเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอเทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย โดยวัตถุมีอัตราเร็ว v , รัศมี r , อัตราเร็วเชิงมุม ω , ที่เวลา $t = 0$ มุม $\theta = 0$ rad และ ที่เวลา $t = t$ มุม $\theta = \omega t$ ตามรูปด้านล่าง



จากรูปด้านบน จะได้ $\vec{r} = r\cos\theta\hat{i} + r\sin\theta\hat{j}$

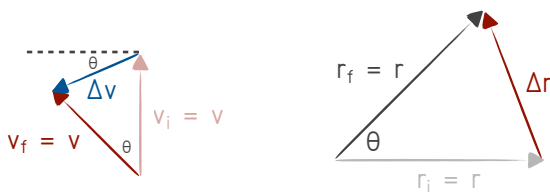
$$\vec{r} = r\cos(\omega t)\hat{i} + r\sin(\omega t)\hat{j}$$

และ

$$\vec{v} = -\omega r\sin\theta\hat{i} + \omega r\cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{v} = -\omega r\sin(\omega t)\hat{i} + \omega r\cos(\omega t)\hat{j}$$

พิจารณาสามเหลี่ยมคล้าย



การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\Delta v}{v} &= \frac{\Delta r}{r} \\ \frac{\Delta v}{v \Delta t} &= \frac{\Delta r}{r \Delta t} \\ \frac{a}{v} &= \frac{v}{r} \\ a &= \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r\end{aligned}$$

จากทิศทางของ $\vec{a}$ มีทิศเดียวกับ $\Delta \vec{r}$ จะได้ $\hat{a} = -\hat{r}$

$$\therefore \vec{a} = \frac{v^2}{r}(-\hat{r}) = \omega^2 r(-\hat{r})$$



ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง (Centripetal Acceleration)

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอจะมีความเร่งขนาด $\frac{v^2}{r}$ หรือ $\omega^2 r$ โดยมีทิศเข้าหาจุดศูนย์กลางของวงกลม เรียกความเร่งนี้ว่า ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง (Centripetal Acceleration ; $\vec{a}_c$ [m/s²]) เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\vec{a}_c = \frac{v^2}{r}(-\hat{r}) = \omega^2 r(-\hat{r})$$

 v คือ อัตราเร็วของวัตถุ r คือ รัศมีของวงกลม ω คือ อัตราเร็วเชิงมุมของวัตถุ $-\hat{r}$ บอกว่า $\vec{a}_c$ มีทิศเข้าหาจุดศูนย์กลางของวงกลม

ข้อสังเกต

วัตถุที่เคลื่อนที่แบบวงกลมด้วยรัศมีและอัตราเร็วสม่ำเสมอเป็นการเคลื่อนที่โดยมีความเร่งที่มีทิศทางเข้าสู่ศูนย์กลางของการเคลื่อนที่ โดยความเร่งดังกล่าวมีขนาดคงที่ แต่ทิศทางไม่คงที่

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.67

วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมสม่ำเสมอรัศมี 500 m ด้วยอัตราเร็ว 720 km/hr วัตถุดังกล่าวจะมีความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางเป็นกี่เท่าของค่า g ?

Answer : 8.16

Problem 7.68

วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมสม่ำเสมอด้วยรัศมี 7.00 m และมีความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางขนาด 7.00 m/s^2 วัตถุดังกล่าวจะเคลื่อนที่ครบหนึ่งรอบโดยใช้เวลาเท่าใด?

Answer : 6.28 s

Problem 7.69

วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมสม่ำเสมอด้วยรัศมี 0.90 m โดยมีอัตราการหมุนอยู่ที่ 6.0 รอบต่อวินาที จงหาขนาดของความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางของวัตถุดังกล่าว?

Answer : 1.3 km/s^2

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.70

วัตถุมวล m เคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี r ด้วยอัตราเร็วคงที่ v จงหาขนาดแรงเฉลี่ยที่กระทำกับวัตถุในช่วงการเคลื่อนที่ $\frac{1}{4}$ รอบ?

$$\text{Answer : } \frac{2\sqrt{2}mv^2}{\pi r}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.71

เด็กคนหนึ่งนั่งชิงช้าสวรรค์ซึ่งหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุมสม่ำเสมอ รัศมี 7.00 m คำนวณการเคลื่อนที่ของชิงช้าสวรรค์เท่ากับ 880 s ขณะที่เด็กคนนี้อยู่ที่ตำแหน่งสูงสุดได้ทำโทรศัพท์มือถือหลุดมือและตกลงมาจากชิงช้าสวรรค์ ถ้าประมาณว่าจุดต่ำสุดของชิงช้าสวรรค์นี้อยู่ที่พื้นพอดี โทรศัพท์มือถือดังกล่าวจะตกถึงพื้นห่างจากจุดต่ำสุดของชิงช้าสวรรค์เป็นระยะเท่าใด?

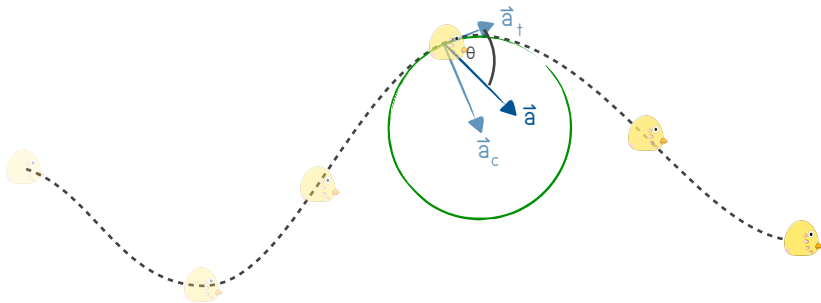
Answer : 8.45 cm

การเคลื่อนที่แบบวงกลมไม่สม่ำเสมอ (Nonuniform Circular Motion)



ความเร่งในแนวเส้นสัมผัสและในแนวรัศมี

ในกรณีที่วัตถุเคลื่อนที่เป็นแนวเส้นโค้งและไม่ได้เป็นวงกลมแบบสม่ำเสมอ สามารถอธิบายการเคลื่อนที่ดังกล่าวโดยวิธีแยกองค์ประกอบของเวกเตอร์บนแนวรัศมี และแนวเส้นสัมผัสของวงกลม ซึ่งวงกลมดังกล่าวถูกสร้างมาให้สัมผัสกับเส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุในช่วงเล็กๆ ดังรูปด้านล่าง



จากรูปด้านบน
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c = \frac{dv}{dt} \hat{\theta} - \frac{v^2}{r} \hat{r}$$

โดยที่
$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \hat{\theta}$$

$$\vec{a}_c = - \frac{v^2}{r} \hat{r}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_c|^2} \quad \text{และ} \quad \tan \theta = \frac{|\vec{a}_c|}{|\vec{a}_t|}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

a คือ ความเร่งของวัตถุ

a_c คือ ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง หรือความเร่งในแนวรัศมี (Radial Acceleration)

a_t คือ ความเร่งในแนวเส้นสัมผัส (Tangential Acceleration)

v คือ อัตราเร็วของวัตถุ

r คือ รัศมีของวงกลม

θ คือ มุมของความเร่งของวัตถุเทียบกับแนวเส้นสัมผัสของวงกลม

$\hat{O}$ บอกว่ามีทิศชี้ทวนเข็มนาฬิกาตามแนวเส้นสัมผัสของวงกลม

$-\hat{r}$ บอกว่ามีทิศชี้เข้าหาจุดศูนย์กลางของวงกลม



Problem 7.72

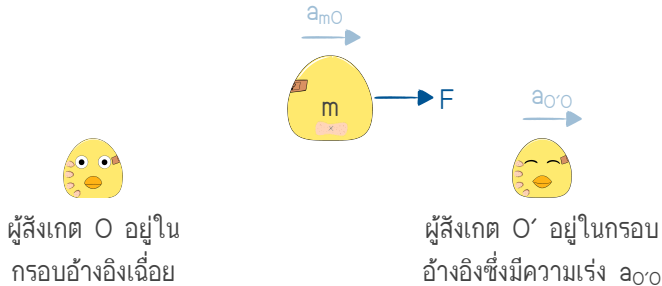
วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่ 0.50 m/s^2 กำลังเคลื่อนที่ผ่านเนินโค้งรัศมี 500 m ขณะวัตถุดังกล่าวอยู่ที่จุดสูงสุดของเนินโค้งนี้ วัตถุมีอัตราเร็วเท่ากับ 21 m/s วัตถุดังกล่าวจะมีความเร่งขนาดเท่าใด และความเร่งมีทิศเอียงทำมุมกับแนวเส้นสัมผัสขนาดเท่าใด?

Answer : $|a| = 1.0 \text{ m/s}^2$ and $|\theta| = 60^\circ$



แรงปลอม (Fictitious Forces)

พิจารณาการใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน โดยผู้สังเกตไม่ได้อยู่ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย เริ่มจากการพิจารณาตัวอย่างง่ายๆ กำหนดให้มีวัตถุมวล m ถูกแรง F กระทำให้วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง a_{mO} เทียบกับผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงเฉื่อย ขณะนั้นได้มีผู้สังเกต O ซึ่งอยู่ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย และ O' ซึ่งอยู่ในกรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง $a_{O'O}$ เทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย ดังรูปด้านล่าง



พิจารณากฎข้อ 2 ของนิวตันในแนวแกน x ในมุมมองของกรอบ O จะได้

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$F = ma_{mO}$$

$$F = m(a_{mO'} + a_{O'O})$$

$$F = ma_{mO'} + ma_{O'O}$$

$$F - ma_{O'O} = ma_{mO'}$$

เห็นได้ว่าถ้ากรอบอ้างอิงที่มีความเร่งจะยังคงใช้สมการ $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ ทางด้านของ $\Sigma \vec{F}$ จะมีเทอม $m\vec{a}_{O'O}$ เพิ่มขึ้นมา และเราจะเรียกเทอมนี้ว่าแรงปลอม (Fictitious Force)

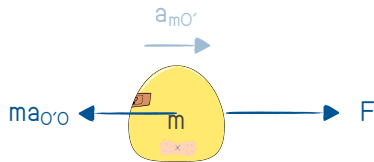
การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)



แรงปลอม (Fictitious Force)

แรงปลอม (Fictitious Force ; $\vec{F}_f$ [N]) คือ แรงซึ่งเกิดจากความเร่งของกรอบอ้างอิงของผู้สังเกต เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\vec{F}_f = -m\vec{a}_{O'O}$$



m คือ มวลของวัตถุซึ่งถูกสังเกต

$a_{O'O}$ คือ ความเร่งของผู้สังเกตเทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย

Problem 7.73

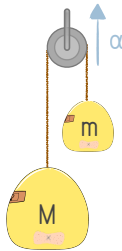
ผู้สังเกตซึ่งมีความเร่งเท่ากับวัตถุมวล m เห็นแรงขนาด F เข้ามากระทำกับวัตถุ ผู้สังเกตดังกล่าวจะเห็นแรงปลอมมีขนาดและทิศทางเป็นอย่างไร?

Answer : $-\vec{F}$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.74

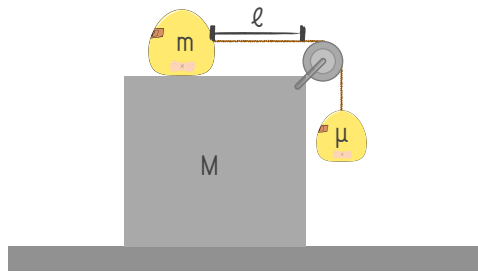
จากรูปด้านล่าง ถ้าดึงรอกขึ้นด้วยความเร่งขนาด α รอกจะเห็นวัตถุทั้งสองมีความเร่งขนาดเท่าใด (กำหนดให้เชือกเบามากและตึง รอกเบามากและไม่มีมวล)?



$$\text{Answer : } \frac{(M - m)(g + \alpha)}{M + m}$$

Problem 7.75

จากรูปด้านล่าง ถ้าไม่คำนึงถึงแรงเสียดทานในทุกผิวสัมผัส และระบบเริ่มต้นจากหยุดนิ่ง จงหาว่ามวล m จะเคลื่อนที่หลุดจากมวล M ภายในเวลาประมาณเท่าใด (กำหนดให้เชือกเบามากและตึง รอกเบามากและไม่มีควมฝืด)?



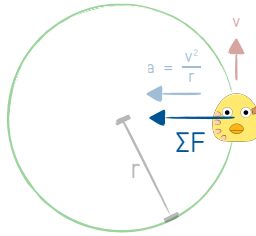
การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

$$\text{Answer : } \sqrt{\frac{2\ell(M\mu + \mu m + mM)}{(M + m)\mu g}}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

พิจารณาวัตถุมวล m กำลังเคลื่อนที่เป็นวงกลมแบบสม่ำเสมอรัศมี r ด้วยอัตราเร็วคงที่ v ในมุมมองของผู้สังเกตซึ่งอยู่ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย ดังรูปด้านล่าง



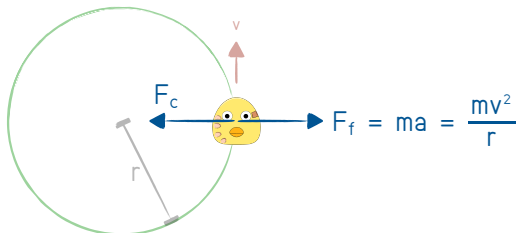
จะได้

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Sigma \vec{F} = m\left(-\frac{v^2}{r}\hat{r}\right)$$

$$\Sigma \vec{F} = -\frac{mv^2}{r}\hat{r}$$

พิจารณาวัตถุมวล m กำลังเคลื่อนที่เป็นวงกลมแบบสม่ำเสมอรัศมี r ด้วยอัตราเร็วคงที่ v ในมุมมองของผู้สังเกตซึ่งเคลื่อนที่ติดไปกับวัตถุดังกล่าว ดังรูปด้านล่าง



จะได้

$$\vec{F}_f = m\frac{v^2}{r}\hat{r}$$



แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง และแรงหนีศูนย์กลาง
สำหรับผู้สังเกตในกรอบเฉื่อย

จะเห็นวัตถุมีความเร่งเป็น $\vec{a}_c = \frac{v^2}{r}(-\hat{r}) = \omega^2 r(-\hat{r})$

และวัตถุมีแรงลัพธ์เป็น $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_c = -\frac{mv^2}{r}\hat{r} = -m\omega^2 r\hat{r}$

$\vec{F}_c$ คือ แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง (Centripetal Force)

m คือ มวลของวัตถุ

$\vec{a}_c$ คือ ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง

v คือ อัตราเร็วของวัตถุ

r คือ รัศมีของวงกลม

ω คือ อัตราเร็วเชิงมุมของวัตถุ

$-\hat{r}$ บอกว่ามีทิศชี้เข้าหาจุดศูนย์กลางของวงกลม

สำหรับวัตถุ หรือ ผู้สังเกตที่มีความเร่งเท่ากับวัตถุ

จะเห็นวัตถุมีความเร่งเป็น $\vec{a} = 0$

และรู้สึกถึงแรงปลอมเป็น $\vec{F}_{fc} = \frac{mv^2}{r}\hat{r} = m\omega^2 r\hat{r}$

$\vec{F}_{fc}$ คือ แรงหนีศูนย์กลาง (Centrifugal Force)

m คือ มวลของวัตถุ

v คือ อัตราเร็วของวัตถุ

r คือ รัศมีของวงกลม

ω คือ อัตราเร็วเชิงมุมของวัตถุ

$\hat{r}$ บอกว่ามีทิศชี้ออกจากจุดศูนย์กลางของวงกลม

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

ข้อสังเกต

ในมุมมองของกรอบอ้างอิงเฉื่อยวัตถุที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมจะมีแรงลัพธ์กระทำในทิศทางเข้าสู่ศูนย์กลาง เรียกแรงลัพธ์นี้ว่าแรงเข้าสู่ศูนย์กลาง

แต่ในมุมมองของวัตถุที่เคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอ วัตถุจะรับรู้ถึงแรงปปลอม เรียกแรงปปลอมนี้ว่าแรงหนีศูนย์กลาง ทำให้แรงลัพธ์และความเร่งที่วัตถุรับรู้มันเท่ากับศูนย์



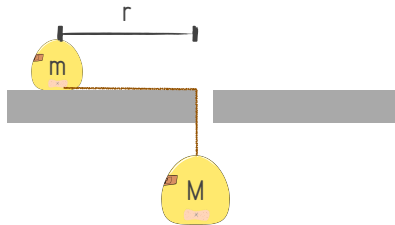
Problem 7.76

วัตถุมวล m เคลื่อนที่เป็นวงกลม ด้วยรัศมีคงที่ r_1 ถ้าวัตถุดังกล่าวเปลี่ยนรัศมีเป็น r_2 โดยยังคงรักษาความแรงเข้าสู่ศูนย์กลางไว้เท่าเดิม คำนวณในการเคลื่อนที่จะเป็นกี่เท่าของคาบการเคลื่อนที่เดิม?

Answer : $\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$

Problem 7.77

จากรูปด้านล่าง ซึ่งเป็นภาพด้านข้าง วัตถุมวล M กำลังอยู่นิ่ง ถ้าเชือกที่ผูกติดกับมวลทั้งสองตึงและเบามากๆ จงหาว่าวัตถุมวล m จะต้องเคลื่อนที่เป็นวงกลมอยู่บนระนาบของพื้นดังกล่าวด้วยอัตราเร็วเท่าใด?



Answer : $\sqrt{\frac{Mgr}{m}}$

Problem 7.78

วัตถุมวล m_1 และ m_2 ต่างเคลื่อนที่เป็นวงกลมสม่ำเสมอบนโต๊ะซึ่งไร้แรงเสียดทาน โดยมีเชือกผูกมวลสอดผ่านรูกลางโต๊ะ ถ้ารัศมีในการเคลื่อนที่ของมวล m_1 เป็น $\frac{3}{4}$ เท่าของรัศมีในการเคลื่อนที่ของมวล m_2 แต่เชือกทั้งสองเส้นมีแรงตึงในเส้นเชือกเท่ากัน พลังงานจลน์ของมวล m_1 เป็นกี่เท่าของมวล m_2 ?

Answer : $\frac{3}{4}$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

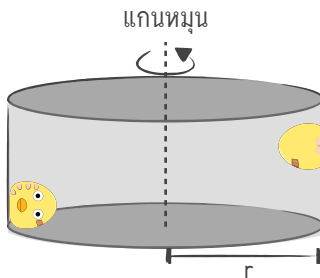
Problem 7.79

วัตถุมวล m วางบนจานรัศมี R ซึ่งหมุนในแนวระดับ โดยมีสัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตระหว่างผิวจานกับวัตถุเท่ากับ μ และวัตถุอยู่ห่างจากแกนหมุนเป็นระยะ ℓ ถ้าวัตถุไม่ไถลไปบนจาน จานดังกล่าวหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุมมากที่สุดเท่าใด?

Answer : $\sqrt{\frac{\mu g}{\ell}}$

Problem 7.80

อาณานิคมในอวกาศได้ถูกออกแบบให้เป็นรูปทรงกระบอกบางรัศมี r โดยให้มีผิวข้างทรงกระบอกด้านในเป็นพื้นสำหรับมนุษย์อยู่อาศัย ถ้าต้องการให้ผู้อยู่อาศัยรู้สึกถึงความโน้มถ่วงเท่ากับค่า g เหมือนกับตอนอยู่บนพื้นโลก ทรงกระบอกดังกล่าวต้องหมุนรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมเท่าใด?



การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : $\sqrt{\frac{g}{r}}$

► Problem 7.81 ◀

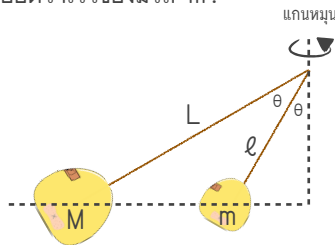
วัตถุมวล m ติดกับสปริงเบายาว ℓ ถ้าแกว่งให้วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมในแนวราบรัศมี L โดยที่ $L > \ell$ พบว่าวัตถุเคลื่อนที่ได้ N รอบภายในเวลา t ค่าคงที่ของสปริงดังกล่าวเป็นเท่าใด?

Answer : $\frac{4\pi^2 N^2 m L}{(L - \ell)t^2}$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.82

มวล m และ M ผูกกับเชือกเบาที่ยาวไม่เท่ากัน ถ้าแกว่งมวลทั้งสองเป็นวงกลมในแนวระดับโดยปลายเชือกอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันดังรูปด้านล่าง จงหาอัตราส่วนของอัตราเร็วของมวล M ต่ออัตราเร็วของมวล m ?

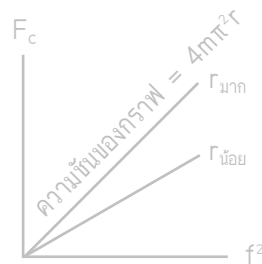
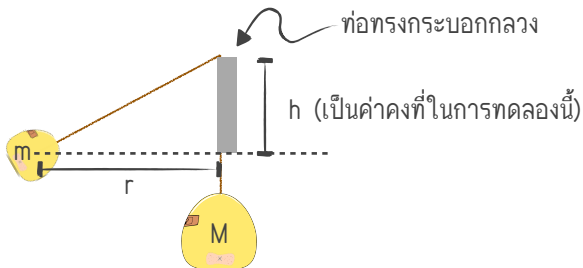


$$\text{Answer : } 2\sqrt{\frac{L\cos(\theta)}{l(1 - \tan^2\theta)}}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.83

ในการทดลองเพื่อหาแรงเข้าสู่ศูนย์กลางโดยการแกว่งมวล m ให้เคลื่อนที่เป็นวงกลม และมีมวล M ถ่วงน้ำหนักไว้ในแนวดิ่งดังรูปด้านล่าง ถ้าต้องการนำข้อมูลมาวาดกราฟระหว่างกำลังสองของความเร็วในการเคลื่อนที่ของมวล m (v^2) กับแรงเข้าสู่ศูนย์กลาง (F_c) จะได้แนวโน้มกราฟเป็นอย่างไร?

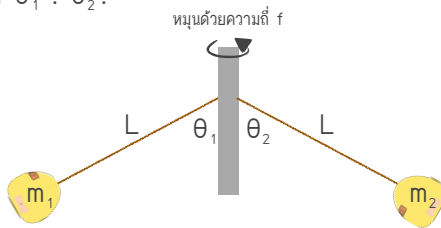


Answer :

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.84

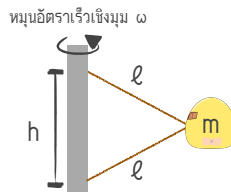
วัตถุมวล m_1 และ m_2 เชื่อมต่อกับปลายลวดแข็งและเบา ยาว L โดยปลายอีกด้านหนึ่งของลวดยึดติดกับท่อนั่งรูปด้านล่าง เมื่อหมุนท่อนั่งกลิ้งด้วยความถี่ f ทำให้ลวดที่เชื่อมต่อกับมวล m_1 และ m_2 เอียงทำมุม θ_1 และ θ_2 กับแนวดิ่ง ตามลำดับ จงหาอัตราส่วนของ $\theta_1 : \theta_2$?



Answer : 1

Problem 7.85

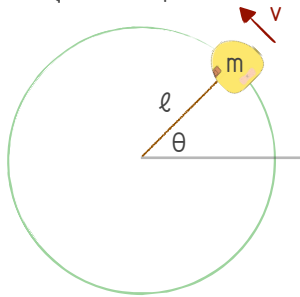
วัตถุมวล m ผูกกับเชือกเบาและตึงสองเส้น ยาวเส้นละ ℓ ปลายเชือกอีกด้านของแต่ละเส้นยึดติดกับท่อน โดยจุดที่ยึดติดกับท่อนของเชือกแต่ละเส้นห่างกันเป็นระยะ h ดังรูปด้านล่าง ถ้าท่อนดังกล่าวกำลังหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω จงหาแรงดึงของเชือกแต่ละเส้น?



$$\text{Answer : } \frac{m\ell}{2h}(\omega^2 h + 2g) \text{ and } \frac{m\ell}{2h}(\omega^2 h - 2g)$$

Problem 7.86

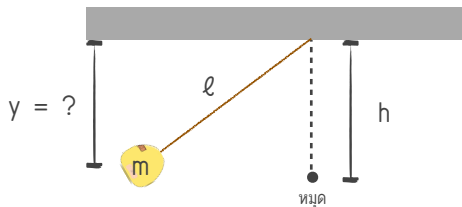
วัตถุมวล m ผูกติดกับเชือกเบาหลายๆ ยาว ℓ ถูกเหวี่ยงให้เคลื่อนที่เป็นวงกลมในระนาบแนวดิ่งด้วยอัตราเร็วคงที่ v และมีรัศมีประมาณความยาวของเชือกดังรูปด้านล่าง จงหาแรงตึงในเส้นเชือกที่มุม θ ใดๆ?



Answer : $m\left(\frac{v^2}{\ell} - g\sin\theta\right)$

Problem 7.87

ลูกตุ้มขนาดเล็ก m ผูกติดกับเชือกเบายาว ℓ โดยปลายเชือกอีกด้านยึดติดกับเพดาน มีหมุดในแนวระดับอยู่ใต้จุดตรึงของเชือกเป็นระยะ h โดย $h < \ell$ ดังรูปด้านล่าง ต้องปล่อยลูกตุ้มต่ำจากเพดานเท่าใด ลูกตุ้มจึงจะหมุนรอบหมุดดังกล่าวได้ครบรอบพอดี?



การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

$$\text{Answer : } \frac{5h - 3\ell}{2}$$

Problem 7.88

จุดวัตถุมวล m ติดกับสปริงเบายาว ℓ มีค่าคงที่ของสปริง $k = \frac{10mg}{\ell}$ ปลายอีกด้านของสปริงยึดกับจุดหมุนซึ่งไม่มีความฝืด ถ้าแกว่งในวัตถุมหุนในแนวดิ่ง ถ้าขณะที่อยู่ในจุดสูงสุด วัตถุอยู่ห่างจากจุดหมุนเป็นระยะ ℓ พอดี ขณะที่อยู่ในจุดต่ำสุดวัตถุจะอยู่ห่างจากจุดหมุนเป็นระยะเท่าใด?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : 1.42

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.89

วัตถุมวล m กดสปริงเบาซึ่งมีค่าคงที่ของสปริง k เข้าไปจากตำแหน่งสมดุลของสปริง เป็นระยะ x หลังจากปล่อยวัตถุ วัตถุได้เคลื่อนที่ไปตามรางลื่น จนเข้าสู่รางวงกลม ในแนวดิ่งรัศมี r จงหาระยะ x น้อยสุดที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ผ่านรางวงกลมดังกล่าว ได้พอดี?

Answer : $\sqrt{\frac{5mgr}{k}}$

Problem 7.90

เป้าหมาย M ผูกกับเชือกเบายาว r ซึ่งแขวนไว้ในแนวดิ่ง ยิงวัตถุมวล m ให้เคลื่อนที่เป็นเส้นตรงในแนวราบเข้าไปฝังติดกับเป้าหมายกล่าว ส่งผลให้เป้าหมายเคลื่อนที่เป็นวงกลมในแนวดิ่งรอบจุดหมุน จงหาอัตราเร็วน้อยสุดของวัตถุที่เข้าชนเป้าหมายกล่าว?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

$$\text{Answer : } \frac{(M + m)\sqrt{5rg}}{m}$$

Problem 7.91

วัตถุมวล m_1 เคลื่อนที่ในแนวระดับด้วยความเร็วคงที่ u_1 เข้าชนมวล m_2 ซึ่งแขวนไว้กับเชือกเบายาว ℓ หลังการชนมวล m_2 เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุดหมุนได้พอดี m_1 จะทะลุมวล m_2 ไปด้วยความเร็วขนาดเท่าใด?

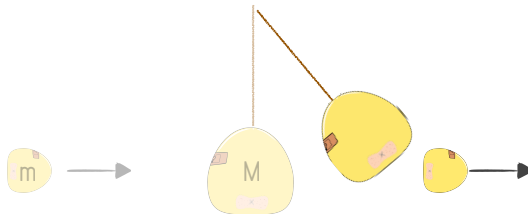
การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

$$\text{Answer : } u_1 - \frac{m_2 \sqrt{5\ell g}}{m_1}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.92

วัตถุมวล M ถูกแขวนอยู่ในแนวดิ่งด้วยเชือกมวลเบาหลายๆ ยาว L วัตถุมวล m ยังเข้าใส่ในแนวระดับ ทำให้มวล m ทะลุผ่านมวล M โดยมวล m มีความเร็วลดลงครึ่งหนึ่ง และมวล M หมุนเป็นวงกลมได้พอดี ถ้าไม่คิดแรงต้านอากาศ มวล m จะถูกยิงเข้าไปด้วยความเร็วขนาดเท่าใด?



$$\text{Answer : } \frac{2M}{m} \sqrt{5gL}$$

Problem 7.93

รถยนต์มวล m วิ่งบนถนนราบซึ่งโค้งด้วยรัศมี r ถ้าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตระหว่างพื้นกับถนนในแนวรัศมีเท่ากับ μ เพื่อไม่ให้หลุดออกจากถนน รถยนต์คันดังกล่าวจะเลี้ยวโค้งด้วยอัตราเร็วได้สูงสุดเท่าใด และถ้าเกิดเหตุการณ์บางอย่างจนทำให้สัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตระหว่างพื้นกับถนนในแนวรัศมีลดลงเหลือครึ่งหนึ่งจากค่าเดิม อัตราเร็วสูงสุดที่ใช้ในการเลี้ยวโค้งจะลดลงเหลือกี่เปอร์เซ็นต์ของอัตราเร็วสูงสุดเดิม?

Answer : $v_{\max} = \sqrt{\mu rg}$ and 71%

Problem 7.94

รถยนต์มวล m วิ่งบนถนนราบซึ่งโค้งด้วยรัศมี r สัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตระหว่างพื้นกับถนนเท่ากับ μ ถ้ารถยนต์คันดังกล่าวมีอัตราเร็ว v ซึ่งสูงเกินไปจนทำให้รถยนต์เอียงทำมุม θ เทียบกับแนวดิ่ง แต่ยังไม่เลยโค้งผ่านไปได้อย่างน่าตื่นเต้น จงแสดงว่า $\tan\theta = \frac{v^2}{rg} = \mu$?

Problem 7.95

ในขณะที่ผู้เข้าแข่งขันรถจักรยานยนต์เข้าสู่ทางโค้งซึ่งมีรัศมีมีความโค้งเท่ากับ r ได้ทำการเอียงรถเข้าหาจุดศูนย์กลางความโค้งทำมุม θ เทียบกับแนวดิ่ง เพื่อช่วยในการทรงตัว ถ้าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตระหว่างพื้นกับถนนเท่ากับ μ และรถจักรยานยนต์ดังกล่าวมีอัตราเร็ว v จงแสดงว่า $\tan\theta = \frac{v^2}{rg} = \mu$?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.96

รถยนต์มวล 2,000 kg มีความกว้าง 1.966 m เคลื่อนที่บนถนนโค้งราบซึ่งมีรัศมีความโค้งเท่ากับ 100.0 m ถ้าศูนย์กลางมวลของรถยนต์คันดังกล่าวอยู่สูงจากพื้นถนน 0.4500 m รถยนต์คันดังกล่าวสามารถเคลื่อนที่ในโค้งนี้ด้วยความเร็วสูงสุดเท่าใด?

Answer : 46.27 m/s

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

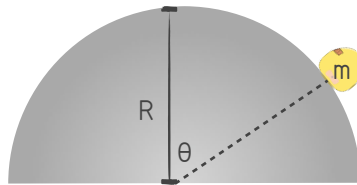
Problem 7.97

ในการออกแบบถนนโค้งโดยพิจารณากรณีที่อันตรายที่สุดกรณีหนึ่ง คือ กรณีที่ถนนลื่นมากๆ จนประมาณได้ว่าไม่มีแรงเสียดทานอยู่เลย ซึ่งเป็นกรณีที่รถจะไม่สามารถเลี้ยวโค้งได้เนื่องจากไม่มีแรงเสียดทานเป็นแรงเข้าสู่ศูนย์กลางเพื่อดึงวัตถุให้เคลื่อนที่เป็นวงกลม จึงต้องใช้แรงอื่นเข้ามาเป็นแรงเข้าสู่ศูนย์กลางแทนแรงเสียดทานที่หายไป ด้วยความฉลาดในการออกที่ไม่เพิ่มต้นทุนในการสร้างถนนมากนัก ได้มีการออกแบบให้ถนนในส่วนโค้งนี้เอียงจากแนวระดับขึ้นมา ถ้ารัศมีความโค้งของถนนเท่ากับ r และต้องการให้ถนนรองรับอัตราเร็วได้สูงสุด v ถนนดังกล่าวจะต้องเอียงทำมุมเท่าใดเทียบกับแนวระดับ?

$$\text{Answer : } \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right)$$

Problem 7.98

วัตถุมวล m เดิมอยู่นิ่งที่จุดบนสุดของผิวครึ่งทรงกลมรัศมี R ถ้าผิวครึ่งทรงกลมลื่น และวัตถุเริ่มไถลลงมาตามผิวครึ่งทรงกลมดังกล่าว จงหาแรงปกติที่ผิวครึ่งทรงกลมกระทำกับวัตถุที่มุม θ ใดๆ และวัตถุจะหลุดจากผิวครึ่งทรงกลมที่มุม θ เท่าใด (กำหนดให้ผิวครึ่งทรงกลมอยู่นิ่งตลอดการเคลื่อนที่ของวัตถุ)?

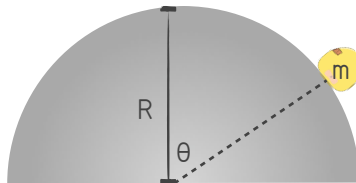


การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : $n = mg(3\cos\theta - 2)$ and $\theta = \cos^{-1}(\frac{2}{3}) \approx 48^\circ$

Problem 7.99

วัตถุมวล m ไถลงจากยอดผิวทรงกลมเส้นรัศมี R ด้วยความเร็วต้นขนาด u โดยที่ $u^2 < Rg$ จงหามุม θ ที่วัตถุเริ่มหลุดจากผิวทรงกลมดังกล่าว?



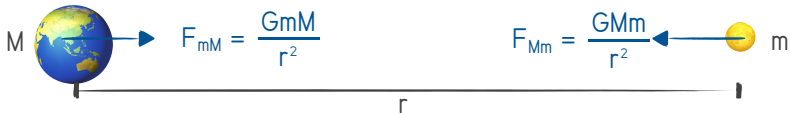
การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

$$\text{Answer : } \cos^{-1}\left(\frac{u^2 + 2gR}{3Rg}\right)$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)



ทบทวนกฎความโน้มถ่วงสากลของนิวตัน



$$\vec{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}(-\hat{r}_{12})$$

$\vec{F}_{12}$ คือ แรงที่มวล m_1 กระทำกับมวล m_2

m_1 และ m_2 คือ มวลของวัตถุที่มีแรงดึงดูดระหว่างกัน

$\hat{r}_{12}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ชี้จากมวล m_1 ไปยังมวล m_2 และเครื่องหมายลบ (-) บอกว่าแรงมีทิศทางดึงดูดมวลทั้งสองเข้าหากัน (ชี้เข้ามามวล m_1)

G คือ ค่าคงที่ความโน้มถ่วงสากล (Universal Gravitational Constant) ในปัจจุบันยอมรับกันที่ประมาณ $6.67408 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

Problem 7.100

ดาวเทียมวงโคจรค้างฟ้า หรือ Geostationary Earth Orbit (GEO) Satellite โคจรเหนือพื้นโลกประมาณ 35,700 km ซึ่งดาวเทียมดังกล่าวจะลอยนิ่งเทียบพื้นโลก ดาวเทียมนี้จะต้องโคจรรอบโลกด้วยอัตราเร็วเชิงมุมเท่าใด?

Answer : $72.7 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.101

ดาวเทียมเคลื่อนที่เป็นวงกลมสม่ำเสมอรอบโลก โดยอยู่ห่างจากพื้นผิวโลกเป็นระยะเท่ากับรัศมีโลกพอดี ถ้าความโน้มถ่วงบริเวณผิวโลกเท่ากับ g ดาวเทียมดังกล่าวมีอัตราเร็วเป็นเท่าใด กำหนดให้โลกมีรัศมีเท่ากับ R ?

Answer : $\sqrt{\frac{Rg}{2}}$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.102

วัตถุมวล m โคจรเป็นวงกลมรอบมวล M โดยจุดศูนย์กลางของมวลทั้งสองอยู่ห่างกันเป็นระยะ r คาบการโคจรดังกล่าวเป็นเท่าใด?

$$\text{Answer : } 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

Problem 7.103

วัตถุมวล m โคจรเป็นวงรีรอบมวล M โดยมีระยะใกล้สุดเป็น R และระยะไกลสุดเป็น $4R$ ขนาดของอัตราเร็วเชิงมุมที่ระยะใกล้สุดเป็นกี่เท่าของอัตราเร็วเชิงมุมที่ระยะไกลสุด?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : 8

Problem 7.104

จงหาขนาดแรงดึงดูดระหว่างโลกกับดวงอาทิตย์ เมื่อโลกมีมวล 5.98×10^{24} kg อยู่ห่างจากดวงอาทิตย์ 1.50×10^{11} m และคาบการโคจรประมาณ 365 วัน?

Answer : 35.6×10^{21} N

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.105

ดาวเทียมมวล m โคจรเป็นวงกลมรัศมี R รอบโลกซึ่งมีมวล M ดาวเทียมดังกล่าวมีพลังงานจลน์ และพลังงานรวมเป็นเท่าใด?

$$\text{Answer : } K = \frac{GMm}{2R} \text{ and } E = -\frac{GMm}{2R}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.106

ดาวเทียมโคจรเป็นวงกลมรัศมี R รอบโลก โดยมีคาบการโคจรเท่ากับ $T \propto R^n$ ค่า n เป็นเท่าใด?

Answer : $\frac{3}{2}$

ข้อสังเกต

ดาวเทียมค้างฟ้าทั้งหมดจะต้องมีรัศมีโคจรใกล้เคียงกัน

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.107

ดาวเทียมโคจรรอบโลกหนึ่งรอบโดยใช้เวลา t ดวงจันทร์ซึ่งห่างจากโลก R โคจรรอบโลกหนึ่งรอบโดยใช้เวลา T ดาวเทียมดังกล่าวห่างจากจุดศูนย์กลางโลกเท่าใด?

Answer : $R(\frac{t}{T})^{2/3}$

การหมุนของวัตถุแข็งเกร็งรอบแกนคงที่ (Rotation of a Rigid Object About a Fixed Axis) [Additional]



วัตถุแข็งเกร็ง (Rigid Object)

วัตถุแข็งเกร็ง (Rigid Object) คือ วัตถุที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง นั่นคือตำแหน่งสัมพัทธ์ของอนุภาคทั้งหมดในวัตถุจะคงที่



มุม, อัตราเร็วเชิงมุม และความเร่งเชิงมุม

มุม (Angular : θ [rad : ไม่มีมิติ])

$$\theta = \frac{s}{r}$$

θ คือ มุม โดย หน่วยเรเดียน (Radian : [rad]) เทียบได้ว่า $\pi \text{ rad} = 180^\circ$

s คือ ความยาวของส่วนเส้นโค้งของวงกลม

r คือ รัศมีของวงกลม

อัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ย (Average Angular Speed : ω_{av} [rad/s, Hz, s^{-1}])

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

อัตราเร็วเชิงมุม ณ เวลาหนึ่ง (Instantaneous Angular Speed : ω [rad/s, Hz, s^{-1}])

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

ความเร่งเชิงมุมเฉลี่ย (Average Angular Acceleration : α_{av} [rad/s², s⁻²])

$$\alpha_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

ความเร่งเชิงมุม ณ เวลาหนึ่ง (Instantaneous Angular Acceleration : α [rad/s², s⁻²])

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

การกระจัดในเชิงมุม ($\Delta\theta$) นั้นไม่ใช่เวกเตอร์ แต่ถ้าพิจารณากรณีการกระจัดเชิงมุมที่น้อยมากๆ เราสามารถมองว่าเป็นเวกเตอร์ได้ ($d\theta$) ดังนั้นเราจะมองว่า ω และ α เป็นเวกเตอร์ด้วยเช่นกัน



การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.108 Challenge

จงหาอัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ยของโลก เมื่อประมาณว่าโลกใช้เวลาหมุนรอบตัวเอง 24 ชั่วโมง?

Answer : $73 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$

Problem 7.109 Challenge

ล้อหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ย 0.314 rad/s เมื่อเวลาผ่านไป 5.00 s ล้อดังกล่าวจะหมุนเป็นมุมกี่องศา?

Answer : 90.0°

Problem 7.110 Challenge

วัตถุแข็งเกร็งหมุนด้วยการกระจัดเชิงมุมตามสมการ $\theta(t) = 2t^2 + t$ เมื่อ θ มีหน่วยเป็นเรเดียน และ t มีหน่วยเป็นวินาที จงหา

- a) การกระจัดเชิงมุมที่เวลา $t = 10.0$ s?
- b) อัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ยในช่วง 0 s ถึง 10.0 s?
- c) อัตราเร็วเชิงมุมที่เวลา 10.0 s?
- d) ความเร่งเชิงมุมเฉลี่ยในช่วง 0 s ถึง 10.0 s?
- e) ความเร่งเชิงมุมที่เวลา 10.0 s?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : a) 210 rad, b) 21.0 rad/s, c) 41.0 rad/s,
d) 4.00 rad/s² and e) 4.00 rad/s

Problem 7.111 Challenge

แผ่นจานซึ่งประมาณได้ว่าเป็นวัตถุแข็งเกร็งหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุมตามสมการ $\omega(t) = A - Bt$ เมื่อ ω มีหน่วยเป็น rad/s, t มีหน่วยเป็น s A และ B เป็นค่าคงที่ซึ่งมีค่ามากกว่าศูนย์ จงหา

- ความเร่งเชิงมุมเฉลี่ยในช่วง 0 s ถึงเวลา t ?
- ความเร่งเชิงมุมที่เวลา t ?
- เวลาที่อัตราเร็วเชิงมุมเป็นศูนย์?
- มุมที่เวลา t เมื่อที่ $t = 0$ s มุมเป็น 0 rad?
- มุมที่อัตราเร็วเชิงมุมเป็นศูนย์?
- อัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ยในช่วง $t = 0$ ถึงเวลาที่อัตราเร็วเชิงมุมเป็นศูนย์?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

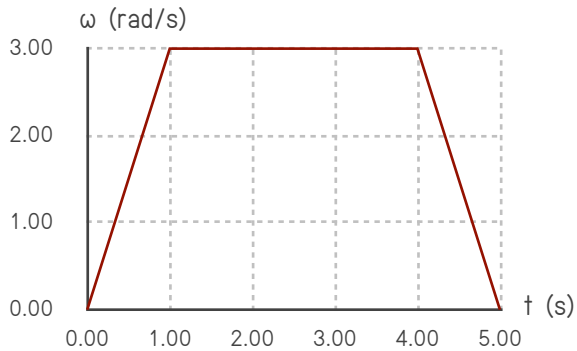
การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : a) $-B$, b) $-B$, c) $\frac{A}{B}$, d) $At - \frac{1}{2}Bt^2$, e) $\frac{A^2}{2B}$ and f) $\frac{A}{2}$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.112 Challenge

จากกราฟด้านล่าง จงหาอัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ยในช่วง 1.00 s - 4.00 s?



Answer : 3.00 rad/s

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

จาก

$$\theta = \frac{s}{r}$$

จะได้

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt}$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

จะได้

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dv}{dt}$$

$$\alpha = \frac{a}{r}$$



ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณเชิงมุมกับเชิงเส้น

$$\theta = \frac{s}{r}$$

หรือ

$$s = r\theta$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

หรือ

$$v = r\omega$$

$$\alpha = \frac{a}{r}$$

หรือ

$$a = r\alpha$$

 θ คือ มุม s คือ ความยาวของส่วนเส้นโค้งของวงกลม r คือ รัศมีของวงกลม ω คือ อัตราเร็วเชิงมุม α คือ ความเร่งเชิงมุม

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.113 Challenge

ล้อรัศมี 35.0 cm เริ่มหมุนจากหยุดนิ่ง เมื่อเวลาผ่านไป 10.0 s วัตถุอัตราเร็วที่ขอบนอกสุดของล้อได้ 14.0 m/s ล้อดังกล่าวหมุนด้วยความเร่งเชิงมุมเฉลี่ยขนาดเท่าใด?

Answer : 4.00 rad/s²

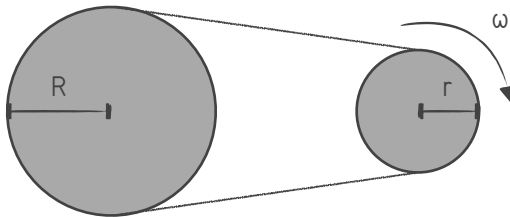
Problem 7.114 Challenge

รถยนต์เคลื่อนที่จากหยุดนิ่งด้วยความเร่งคงที่จนมีความเร็วขนาด 20.0 m/s ภายใน 10.0 s ถ้ารถยนต์ดังกล่าวเคลื่อนที่อยู่บนถนนวงกลมเส้นผ่านศูนย์กลาง 10.0 m รถยนต์คันนี้จะเคลื่อนที่ได้กี่รอบ?

Answer : 3.18 รอบ

Problem 7.115 Challenge

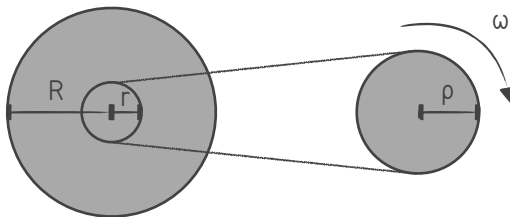
ล้อรัศมี r และล้อรัศมี R เชื่อมต่อกันด้วยโซ่ โดย $R > r$ ดังรูปด้านล่าง ถ้าล้อรัศมี r ถูกปั่นด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω ล้อ R จะมีอัตราเร็วเชิงมุมขนาดเท่าใด?



Answer : $\frac{\omega r}{R}$

Problem 7.116 Challenge

ล้อรัศมี p และล้อรัศมี r เชื่อมต่อกันด้วยโซ่ โดย $p > r$ และล้อรัศมี r มีแกนหมุนร่วมกับล้อรัศมี R โดย $R > r$ ดังรูปด้านล่าง ถ้าล้อรัศมี p ถูกปั่นด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω ล้อ R จะมีอัตราเร็วที่ขอบล้อขนาดเท่าใด?



การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

$$\text{Answer : } \frac{\omega p R}{r}$$

Problem 7.117 Challenge

วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมสม่ำเสมอรัศมี r รอบจุดกำเนิดด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ ω โดยที่เวลา $t = 0$ s วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง $(r, 0)$ ที่เวลา t เวกเตอร์บอกตำแหน่งของวัตถุเป็นเท่าใด?

$$\text{Answer : } r\cos(\omega t)\hat{i} + r\sin(\omega t)\hat{j}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)



การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งภายใต้ความเร่งเชิงมุมคงที่
เนื่องจากนิยามของปริมาณเชิงมุมนั้นเหมือนกับปริมาณเชิงเส้น จึงได้ 5 สมการ
สำหรับอธิบายการเคลื่อนที่ในกรณีที่ความเร่งเชิงมุมคงที่เหมือนกับกรณีที่ความเร่งคงที่

$$\begin{array}{ll} \vec{v} = \vec{u} + \vec{\alpha}t & \dots\dots\dots (ร) \quad \rightarrow \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}t \quad \dots\dots\dots (ธ) \\ \vec{s} = \frac{(\vec{v} + \vec{u})t}{2} & \dots\dots\dots (ล) \quad \rightarrow \quad \vec{\theta} = \frac{(\vec{\omega} + \vec{\omega}_0)t}{2} \quad \dots\dots\dots (ด) \\ \vec{s} = \vec{u}t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2 & \dots\dots\dots (ง) \quad \rightarrow \quad \vec{\theta} = \vec{\omega}_0t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2 \quad \dots\dots\dots (ฉ) \\ \vec{s} = \vec{v}t - \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2 & \dots\dots\dots (ข) \quad \rightarrow \quad \vec{\theta} = \vec{\omega}t - \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2 \quad \dots\dots\dots (ฉ._0) \\ v^2 = u^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{s} & \dots\dots\dots (ท) \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\theta} \quad \dots\dots\dots (ท) \end{array}$$

$\vec{\theta}$ คือ การกระจัดเชิงมุมที่เวลา t

$\vec{\omega}$ คือ อัตราเร็วเชิงมุมที่เวลา t (อัตราเร็วเชิงมุมปลาย)

$\vec{\omega}_0$ คือ อัตราเร็วเชิงมุมที่เวลา 0 (อัตราเร็วเชิงมุมต้น)

$\vec{\alpha}$ คือ ความเร่งเชิงมุม (คงที่)

t คือ เวลา



การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.118 Challenge

ล้อหมุนช้าลงด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่ -5.00 rad/s^2 โดยในช่วง 4.00 s ล้อได้หมุนไปเป็นมุม 60.0 rad จงหาว่าอัตราเร็วเชิงมุมของล้อดังกล่าวที่เวลา 4.00 s เป็นเท่าใด?

Answer : 5.00 rad/s

Problem 7.119 Challenge

เครื่อง centrifuge ในแล็บเคมีหมุนด้วยอัตรา 3600 rev/min ถ้าเครื่องดังกล่าวสามารถหยุดการหมุนได้ด้วย ความหน่วงเชิงมุมคงที่ภายใน 50 รอบ ความหน่วงเชิงมุมดังกล่าวจะมีขนาดเท่าใด?

Answer : 226 rad/s^2

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.120 Challenge

จานวงกลมรัศมี 1.50 m หมุนจากหยุดนิ่งด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่จนมีอัตราเร็วที่ขอบจานเท่ากับ 25.0 m/s ภายใน 2.25 รอบ จงหาขนาดความเร่งเชิงมุมและช่วงเวลาที่ใช้ในการหมุนจานดังกล่าว?

Answer : 9.82 rad/s² and 1.70 s

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.121 Challenge

ล้อรัศมี 35.0 cm เริ่มหมุนจากหยุดนิ่งด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่ เมื่อเวลาผ่านไป 10.0 s ขอบล้อด้านนอกสุดมีความเร็วขนาด 11.0 m/s และเมื่อเวลาผ่านไปอีก 10.0 s ล้อจะหมุนเป็นกี่รอบเมื่อนับจากเริ่มต้น (จาก 0 ถึง 20.0 s)?

Answer : 100 รอบ

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

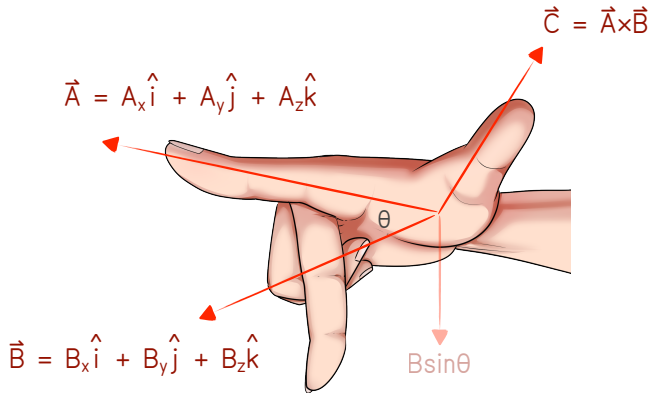
Problem 7.122 Challenge

รถยนต์เริ่มเคลื่อนที่จากหยุดนิ่งบนถนนวงกลมด้วยความเร่งคงที่ในแนวเส้นสัมผัสขนาด 2.00 m/s^2 แต่รถยนต์ดังกล่าวเคลื่อนที่ได้เพียง 1 ใน 4 ของวงกลม จึงเริ่มไถลออกจากถนน จงหาสัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตระหว่างล้อรถยนต์กับถนนดังกล่าว?

Answer : 0.673



ทบทวนผลคูณเชิงเวกเตอร์ (The Vector Product)



จากรูปด้านบน

 $|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$ และหาทิศของ $\vec{C}$ ตามกฎมือขวาจากรูปด้านบน

และ

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix}$$

สมบัติบางข้อของการ cross เวกเตอร์

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

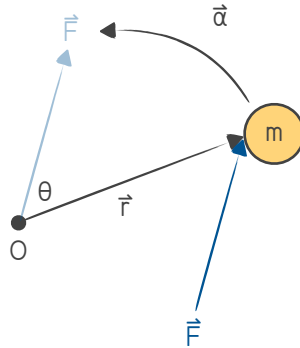
$$\vec{A} \times \vec{B} = 0 \quad ; \quad \vec{A} \parallel \vec{B}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \quad ; \quad \vec{A} \perp \vec{B}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

พิจารณาแรง $\vec{F}$ มากระทำกับจุดมวล m ซึ่งอยู่ห่างจากจุด O เป็นระยะ r หรือมีเวกเตอร์บอกตำแหน่งเป็น $\vec{r}$ ส่งผลให้จุดมวลดังกล่าวหมุนรอบจุด O ด้วยความเร่งเชิงมุม α ดังรูปด้านล่าง



พิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวเส้นสัมผัส

จะได้

$$\begin{aligned}\Sigma \vec{F}_t &= m\vec{a}_t \\ F \sin \theta &= mr\alpha \\ rF \sin \theta &= mr^2\alpha \\ \vec{r} \times \vec{F} &= mr^2\alpha\end{aligned}$$

พิจารณาในกรณีที่มีมวลหลายๆ ก้อน

จะได้

$$\Sigma \vec{r} \times \vec{F} = \Sigma mr^2\alpha$$

เนื่องจากวัตถุแข็งเกร็งจะมีความเร่งเชิงมุมเท่ากันทุกๆ ก้อน

จะได้

$$\begin{aligned}\Sigma \vec{r} \times \vec{F} &= (\Sigma mr^2)\alpha \\ \Sigma \vec{\tau} &= I\alpha \quad ; \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \text{ and } I = \Sigma mr^2\end{aligned}$$



ทอร์ก และโมเมนต์ความเฉื่อย

ทอร์ก (Torque : τ [N·m, kg·m²/s²])

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{F}$ คือ แรงที่มากระทำกับวัตถุ

$\vec{r}$ คือ เวกเตอร์ที่ชี้จากจุดหมุนไปยังตำแหน่งที่แรง $\vec{F}$ มากระทำ

โมเมนต์ความเฉื่อย (Moments of Inertia : I [kg·m²])

กรณีจุดมวล $I = \sum mr^2$

กรณีวัตถุรูปทรงใดๆ $I = \int r^2 dm$

m คือ มวลของวัตถุ

dm คือ ส่วนเล็กๆ มวลวัตถุ จนประมาณได้ว่าเป็นจุดมวล

r คือ ระยะห่างจากแกนหมุน

ในการอินทิเกรตอาจจะต้องมีการเปลี่ยนมวลเล็กๆ dm ให้อยู่ในรูปของความหนาแน่น λ , σ หรือ ρ ขึ้นอยู่กับลักษณะของมวล dm ดังนี้

1-D ความหนาแน่นเชิงเส้น $\lambda = \frac{dm}{d\ell}$; $d\ell$ คือ ความยาวของมวล dm

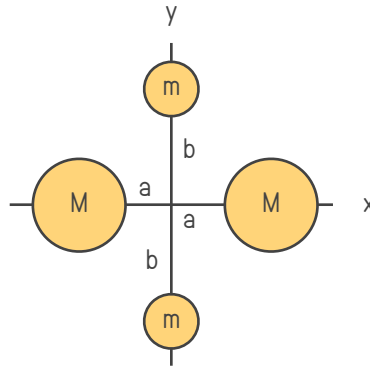
2-D ความหนาแน่นเชิงพื้นที่ $\sigma = \frac{dm}{dA}$; dA คือ พื้นที่ของมวล dm

3-D ความหนาแน่นเชิงปริมาตร $\rho = \frac{dm}{dV}$; dV คือ ปริมาตรของมวล dm

กฎนิวตันในเชิงมุม $\sum \tau = I\alpha$

Problem 7.123 Challenge

จากรูปด้านล่าง จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยเมื่อ



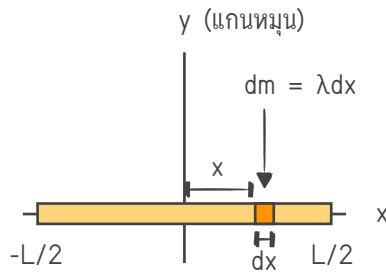
- a) แกน x เป็นแกนหมุน?
- b) แกน y เป็นแกนหมุน?
- c) แกน z เป็นแกนหมุน?

Answer : a) $2mb^2$, b) $2Ma^2$ and c) $2(Ma^2 + mb^2)$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.124 Challenge

จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งวัตถุมวล M กระจายสม่ำเสมอ ยาว L และมีแกนหมุนผ่านจุดศูนย์กลางมวลดังรูปด้านล่าง?

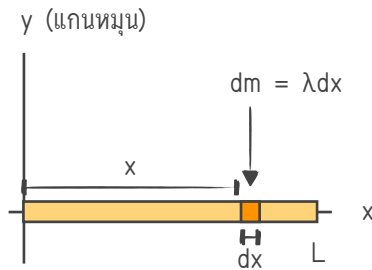


Answer : $\frac{1}{12}ML^2$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.125 Challenge

จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งวัตถุมวล M กระจายสม่ำเสมอ ยาว L และมีแกนหมุนอยู่ที่ปลายวัตถุดังรูปด้านล่าง?

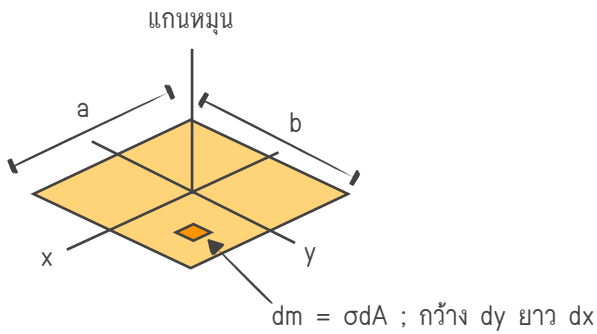


Answer : $\frac{1}{3}ML^2$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.126 Challenge

จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวัตถุมวล M กระจายสม่ำเสมอ กว้าง a ยาว b และมีแกนหมุนผ่านจุดศูนย์กลางมวลดังรูปด้านล่าง?

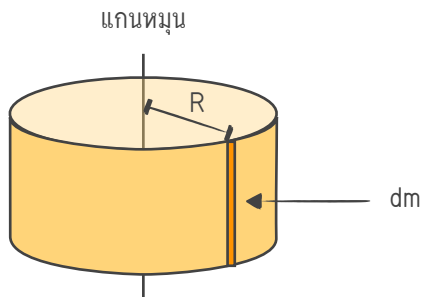


$$\text{Answer : } \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

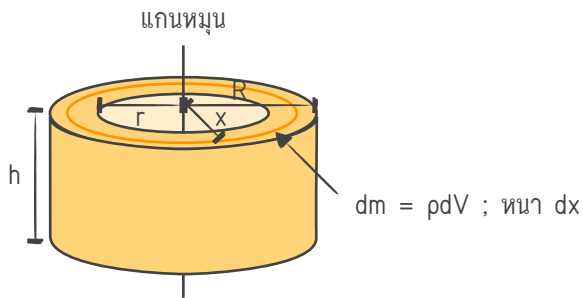
Problem 7.127 Challenge

จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุทรงกระบอกบางมวล M กระจายสม่ำเสมอ รัศมี R และมีแกนหมุนผ่านจุดศูนย์กลางมวลดังรูปด้านล่าง?

Answer : MR^2

Problem 7.128 Challenge

จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุทรงกระบอกกลวงมวล M กระจายสม่ำเสมอ รัศมีด้านใน r รัศมีด้านนอก R และมีแกนหมุนผ่านจุดศูนย์กลางมวลดังรูปด้านล่าง?

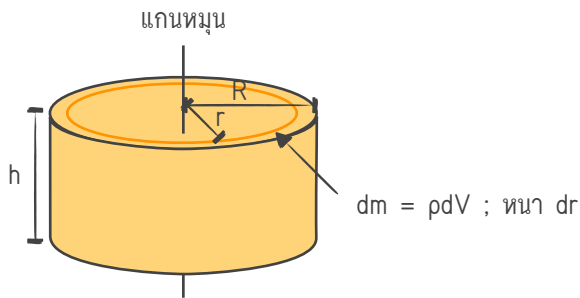


$$\text{Answer : } \frac{1}{2}M(r^2 + R^2)$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.129 Challenge

จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุทรงกระบอกตันมวล M กระจายสม่ำเสมอ รัศมี R และมีแกนหมุนผ่านจุดศูนย์กลางมวลดังรูปด้านล่าง?

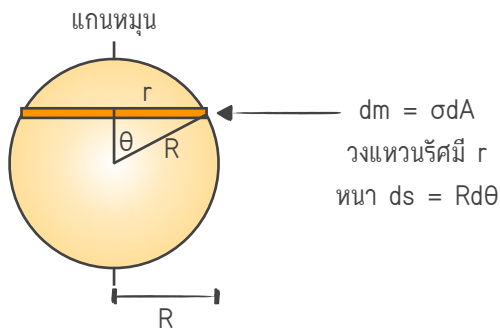


Answer : $\frac{1}{2}MR^2$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.130 Challenge

จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุทรงกลมบางมวล M กระจายสม่ำเสมอ รัศมี R และมีแกนหมุนผ่านจุดศูนย์กลางมวลดังรูปด้านล่าง?



Answer : $\frac{2}{3}MR^2$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.131 Challenge

จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุทรงกลมตันมวล M กระจายสม่ำเสมอ รัศมี R และมีแกนหมุนผ่านจุดศูนย์กลางมวล (Hint : ทรงกลมบางๆ รัศมี r หน้า dr มีปริมาตรเป็น $dV = 4\pi r^2 dr$ เมื่อซ้อนกันจากรัศมี $r = 0$ ไปจนถึงรัศมี $r = R$ จะได้เป็นทรงกลมตันรัศมี R และโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกลมบางเท่ากับ $\frac{2}{3}MR^2$)?

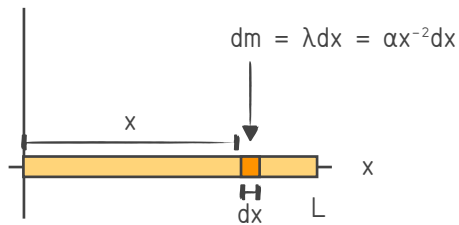
Answer : $\frac{2}{5}MR^2$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.132 Challenge

จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งวัตถุยาว L และมีแกนหมุนอยู่ที่ปลายวัตถุตั้งรูปด้านล่าง ถ้าความหนาแน่นเชิงเส้นของวัตถุเป็นไปตามสมการ $\lambda = \alpha x^{-2}$ เมื่อ α เป็นค่าคงที่ซึ่งมากกว่าศูนย์?

y (แกนหมุน)



Answer : αL

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.133 Challenge

มวล m และ $3m$ ห่างกันเป็นระยะ d วางตัวอยู่บนแกน x มีจุดศูนย์กลางมวลของระบบอยู่ที่จุดกำเนิด ถ้ามีแรง F มากระทำกับมวล m ในทิศขนานกับแกน z ทำให้วัตถุทั้งสองหมุนรอบแกน y จงหาความเร่งเชิงมุมของระบบมวลนี้?

Answer : $\frac{F}{md}$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

พิจารณาวัตถุมวล M ซึ่งมีโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุนซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางมวลเป็น I_0 โดยตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่จุด $(0, 0, 0)$

จะได้ $I_0 = \Sigma mr^2$

พิจารณาแกนหมุนซึ่งเลื่อนขนานจากเดิมออกมาเป็นระยะ d

จะได้ $I = \Sigma m(r \pm d)^2$

$$I = \Sigma mr^2 \pm 2\Sigma mrd + \Sigma md^2$$

$$I = I_0 \pm 2\Sigma mrd + \Sigma md^2 \quad ; I_0 = \Sigma mr^2$$

$$I = I_0 \pm 2d\Sigma mr + (\Sigma m)d^2 \quad ; d \text{ คงที่}$$

$$I = I_0 \pm 2d\Sigma mr + Md^2 \quad ; M = \Sigma m$$

$$I = I_0 \pm 2dMr_{cm} + Md^2 \quad ; r_{cm} = \frac{\Sigma m\vec{r}}{M}$$

$$I = I_0 + Md^2 \quad ; r_{cm} = 0$$



ทฤษฎีแกนขนาน (Parallel-Axis Theorem)

$$I = I_0 + Md^2$$

I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุนใหม่ซึ่งเลื่อนขนานมาจากเดิม

I_0 คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุนซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางมวล

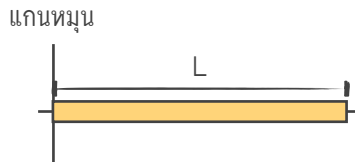
M คือ มวลของวัตถุ

d คือ ระยะซึ่งเลื่อนขนานจากจุดศูนย์กลางมวลของแกนหมุน

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.134 Challenge

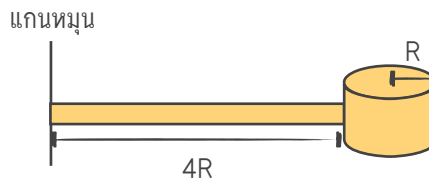
จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งวัตถุมวล M กระจายสม่ำเสมอ ยาว L และมีแกนหมุนอยู่ที่ปลายวัตถุดังรูปด้านล่าง เมื่อโมเมนต์ความเฉื่อยขณะที่แกนหมุนผ่านจุดศูนย์กลางมวลเท่ากับ $\frac{1}{12}ML^2$?



Answer : $\frac{1}{3}ML^2$

Problem 7.135 Challenge

จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุซึ่งประกอบด้วยทรงกระบอกตันมวล M กระจายสม่ำเสมอ รัศมี R และแท่งวัตถุมวล M กระจายสม่ำเสมอ ยาว $4R$ ดังรูปด้านล่าง?

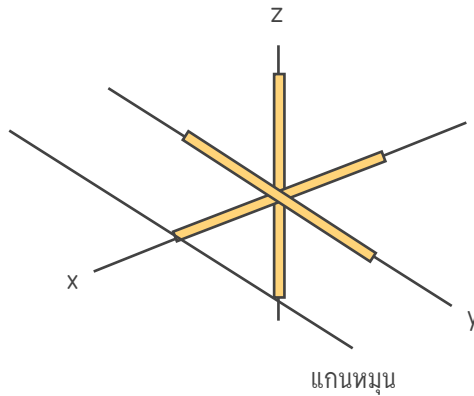


Answer : $\frac{185}{6}MR^2$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.136 Challenge

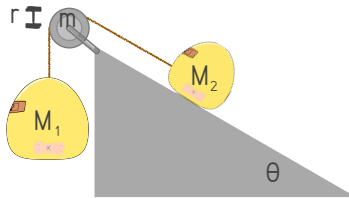
แท่งวัตถุสามแท่ง แต่ละแท่งยาว L มวล M กระจายสม่ำเสมอวางตัวอยู่บนแกน x , y และ z ถ้าวัตถุทั้งสามหมุนรอบแกนหมุนซึ่งขนานกับแกน y และอยู่ที่ปลายวัตถุซึ่งวางอยู่บนแกน x ดังรูปด้านล่าง จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของระบบดังกล่าว?



Answer : $\frac{11}{12}ML^2$

Problem 7.137 Challenge

วัตถุมวล M_1 และ M_2 วางอยู่บนพื้นซึ่งเอียงทำมุม θ กับแนวนอน โดยมวลทั้งสองผูกติดกันด้วยเชือกมวลน้อยมากๆ คล่องผ่านรอกทรงกระบอกตันมวล m กระจายสม่ำเสมอ รัศมี r ดังรูปด้านล่าง ถ้า $M_1 > M_2$ และพื้นเอียงไม่มีแรงเสียดทาน จงหาขนาดความเร่งของระบบ?



การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

$$\text{Answer : } \left(\frac{M_1 - M_2 \sin \theta}{M_1 + M_2 + \frac{1}{2}m} \right) g$$



เงื่อนไขของสมดุล

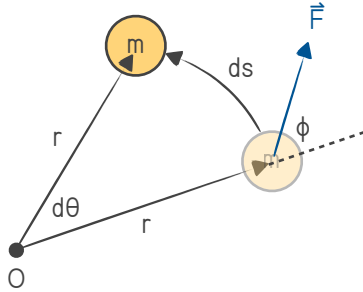
สมดุลการเคลื่อนที่ (Translational Equilibrium)

$$a = 0 \quad \text{หรือ} \quad \Sigma \vec{F} = 0$$

สมดุลการหมุน (Rotational Equilibrium)

$$\alpha = 0 \quad \text{หรือ} \quad \Sigma \vec{\tau} = 0$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)



พิจารณา

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad ; \quad d\vec{r} = d\vec{s}$$

$$W = \int (F \sin \phi) (r d\theta) \quad ; \quad ds = r d\theta$$

$$W = \int r F \sin \phi d\theta$$

$$W = \int (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\theta} \quad ; \quad \vec{r} \times \vec{F} = r F \sin \phi$$

$$W = \int \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} \quad ; \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\Sigma W = \int \Sigma \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$$

$$\Delta K = \int I \vec{\alpha} \cdot d\vec{\theta} \quad ; \quad \Sigma W = \Delta K \text{ and } \Sigma \vec{\tau} = I \vec{\alpha}$$

$$\Delta K = \int I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot d\vec{\theta} \quad ; \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\Delta K = \int I \vec{\omega} \cdot d\vec{\omega} \quad ; \quad \vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

$$K_f - K_i = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

$$\therefore K_r = \frac{1}{2} I \omega^2$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

จากกำลังเฉลี่ย

$$\mathcal{P}_{av} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

กำลัง ณ เวลาใดๆ

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt}$$

กำลังในกรณีวัตถุมีอัตราเร็วเชิงมุมคงที่

$$\mathcal{P} = \tau \cdot \frac{d\theta}{dt} = \tau \cdot \omega$$



งาน พลังงานจลน์ และกำลังในการหมุน

งานในการหมุน (Rotational Work : W [J, kg·m²/s²])

$$W = \int \tau \cdot d\theta$$

 τ คือ ทอร์ก $d\theta$ คือ การกระจัดเชิงมุมส่วนเล็กๆพลังงานจลน์ในการหมุน (Rotational Kinetic Energy : K_r [J, kg·m²/s²])

$$K_r = \frac{1}{2} I \omega^2$$

 I คือ โมเมนต์ความเฉื่อย ω คือ อัตราเร็วเชิงมุมกำลังในการหมุน (Rotational Power : $\mathcal{P}$ [W, kg·m²/s³])

กำลังเฉลี่ย

$$\mathcal{P}_{av} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

กำลัง ณ เวลาใดๆ

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt}$$

กำลังในกรณีวัตถุมีความเร็วเชิงมุมคงที่

$$\mathcal{P} = \tau \cdot \frac{d\theta}{dt} = \tau \cdot \omega$$

Problem 7.138 Challenge

ลูกข่างมีโมเมนต์ความเฉื่อย I มีเชือกมวลเบาหลายๆ พันอยู่รอบลูกข่างซึ่งประมาณได้ว่าลูกข่างมีรัศมี r ซึ่งเดิมอยู่นิ่ง ถ้าดึงเชือกด้วยแรง F ตามแนวเส้นสัมผัสของผิวข้างลูกข่าง ทำให้ลูกข่างหมุนได้ N รอบ ลูกข่างหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุมเท่าใด?

$$\text{Answer : } \sqrt{\frac{4\pi r N F}{I}}$$

Problem 7.139 Challenge

มอเตอร์ไฟฟ้าให้กำลังเฉลี่ย P กับล้อทรงกระบอกตันมวล M กระจายสม่ำเสมอรัศมี R ทำให้ล้อนดังกล่าวมีอัตราเร็วเฉลี่ยขนาด v ล้อนดังกล่าวจะเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่าใด?

$$\text{Answer : } \frac{Mv^3}{4P}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.140 Challenge

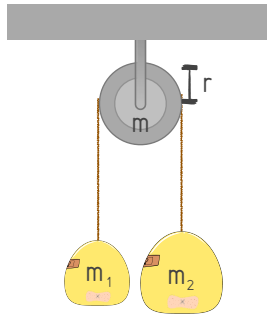
แผ่นจานแข็งเกร็งน้ำหนัก W รัศมี r หมุนจากหยุดนิ่งด้วยแรง F ซึ่งแรงดังกล่าว
 มากกระทำที่ขอบด้านนอกของแผ่นจาน โดยกระทำตามแนวเส้นสัมผัสของแผ่นจาน
 เมื่อเวลาผ่านไป t พลังงานจลน์ของจานดังกล่าวจะมีขนาดเท่าใด?

$$\text{Answer : } \frac{F^2 t^2 g}{W}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.141 Challenge

จากรูปด้านล่างถ่วงรอกประมาณได้ว่าเป็นทรงกระบอกตันมวล m กระจายสม่ำเสมอ รัศมี r และมวล $m_2 > m_1$ จึงทำให้มวล m_2 เคลื่อนที่ลงและมวล m_1 เคลื่อนขึ้น ถ้าเริ่มต้นมวล m_1 และ m_2 อยู่ที่ระดับเดียวกัน ถ่วงรอกไม่มีความฝืด จงหาว่าเมื่อมวล m_2 มีระดับต่ำกว่ามวล m_1 เป็นระยะ $2h$ วัตถุทั้งสองจะมีความเร็วขนาดเท่าใด และรอกจะหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุมขนาดเท่าใด?

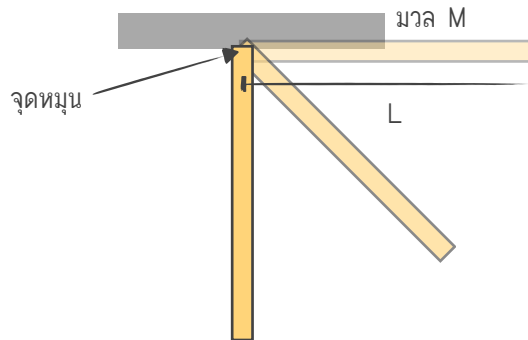


$$\text{Answer : } v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}} \text{ and } \omega = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.142 Challenge

แท่งวัตถุมวล M มีความหนาแน่นคงที่ ยาว L ถูกปล่อยให้หมุนลงมาจากหยุดนิ่ง โดยจุดหมุนไม่มีความฝืด ดังรูปด้านล่าง เมื่อแท่งวัตถุหมุนมายังตำแหน่งต่ำสุด ความเร็วที่จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุจะมีขนาดเท่าใด?

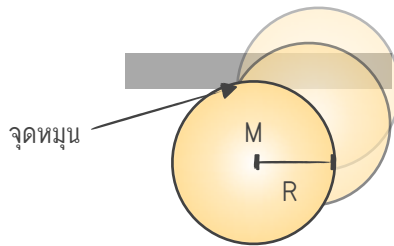


$$\text{Answer : } v_{\text{cm}} = \frac{\sqrt{3gL}}{2}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.143 Challenge

ทรงกระบอกแบนมวล M มีความหนาแน่นคงที่ รัศมี R ถูกปล่อยให้หมุนลงมาจากหยุดนิ่ง โดยจุดหมุนไม่มีความฝืด ดังรูปด้านล่าง ส่วนที่มีอัตราเร็วมากที่สุดของวัตถุจะมีขนาดเท่าใด?

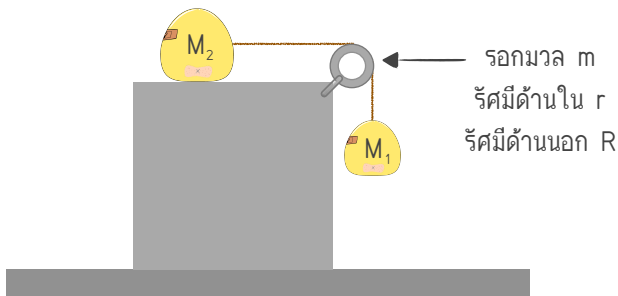


Answer : $4\sqrt{\frac{gR}{3}}$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.144 Challenge

จากรูปด้านล่าง ถ้าประมาณได้ว่ารอกเป็นกระบอก สัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ระหว่างพื้นกับมวล M_2 เท่ากับ μ และวัตถุเริ่มเคลื่อนที่จากหยุดนิ่ง เมื่อมวล M_2 เคลื่อนที่ได้เป็นระยะ x มวล M_2 จะมีความเร็วขนาดเท่าใด?



Answer :
$$\sqrt{\frac{4gx(M_1 - \mu M_2)}{2(M_1 + M_2) + m(1 + \frac{r^2}{R^2})}}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)



การเคลื่อนที่แบบกลิ้งของวัตถุแข็งเกร็ง

การเคลื่อนที่แบบกลิ้งของวัตถุแข็งเกร็ง คือ การที่วัตถุแข็งเกร็งมีการเคลื่อนที่และหมุนเกิดขึ้นพร้อมกัน ดังนั้นการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบนี้จะต้องวิเคราะห์ข้อมูลการเคลื่อนที่ในเชิงเส้นและเชิงมุมร่วมกัน เช่น การคิดพลังงานจลน์ของวัตถุจะต้องคิดพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวล (K_t) และพลังงานจลน์ของการหมุนรอบแกนหมุน (K_r) รวมกัน

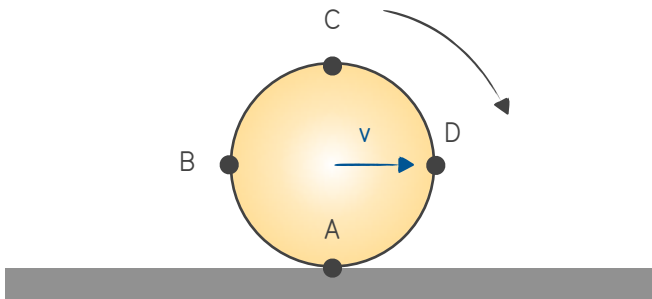
$$K = K_t + K_r$$

$$K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$



Problem 7.145 Challenge

ล้อรัศมี r กลิ้งโดยไม่ไถลด้วยความเร็วที่ศูนย์กลางมวลเท่ากับ v ในทิศขนานกับพื้น ดังรูปด้านล่าง จงหาขนาดความเร็วที่จุด A, B, C และ D?



การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

$$\text{Answer : } |\vec{v}_A| = 0, |\vec{v}_B| = \sqrt{2}v, |\vec{v}_C| = 2v \text{ and } |\vec{v}_D| = \sqrt{2}v$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.146 Challenge

วัตถุทรงกระบอกตันมวล M กระจายสม่ำเสมอ รัศมี R ถูกปล่อยจากหยุดนิ่งให้กลิ้งโดยไม่ไถลลงมาตามแนวพื้นเอียงซึ่งเอียงทำมุม θ กับแนวนอน ถ้าพื้นไม่มีแรงเสียดทาน เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ลงมาเป็นระยะทาง x วัตถุจะมีความเร็วขนาดเท่าใด?

$$\text{Answer : } \sqrt{\frac{4gx\sin\theta}{3}}$$

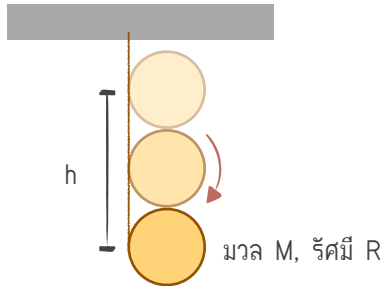
Problem 7.147 Challenge

วัตถุทรงกลมตันมวล M กระจายสม่ำเสมอ รัศมี R ถูกปล่อยจากหยุดนิ่งให้กลิ้งโดยไม่ไถลลงมาตามแนวพื้นเอียงซึ่งเอียงทำมุม θ กับแนวนอน ถ้าพื้นไม่มีแรงเสียดทาน เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ลงมาเป็นระยะทาง x วัตถุจะมีความเร็วขนาดเท่าใด?

$$\text{Answer : } \sqrt{\frac{10gx\sin\theta}{7}}$$

Problem 7.148 Challenge

เชือกเบาพันรอบทรงกระบอกตันรัศมี R มวล M กระจายสม่ำเสมอ เมื่อทรงกระบอกดังกล่าวถูกปล่อยลงมาจากหยุดนิ่งตามแนวดิ่งโดยปลายเชือกด้านบนถูกตรึงไว้อยู่กับที่ ดังรูปด้านล่าง จงหาอัตราเร็วของจุดศูนย์กลางของทรงกระบอกดังกล่าวเมื่อทรงกระบอกเคลื่อนที่ลงมาเป็นระยะ h ?

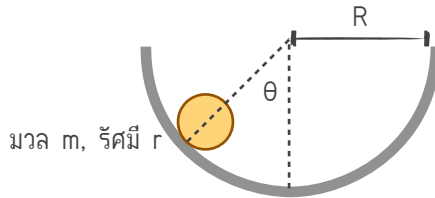


Answer : $\sqrt{\frac{4gh}{3}}$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.149 Challenge

ทรงกลมตันรัศมี r มวล m กระจายสม่ำเสมอ ถูกปล่อยจากหยุดนิ่งให้กลิ้งโดยไม่ไถลในซามครึ่งทรงกลมรัศมี R ดังรูปด้านล่าง จงหาอัตราเร็วเชิงมุมของทรงกลมตันเมื่อทรงกลมตันอยู่ที่ก้นซามครึ่งทรงกลม (ตอบในรูป M, r, R, g และ θ)?



$$\text{Answer : } \sqrt{\frac{10g(R - r)(1 - \cos\theta)}{7r^2}}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.150 Challenge

แผ่นจานวงกลมมวล M กระจายสม่ำเสมอ รัศมี R ถูกปล่อยจากหยุดนิ่งให้กลิ้งลงมาตามแนวพื้นเอียงซึ่งเอียงทำมุม θ กับแนวระดับ

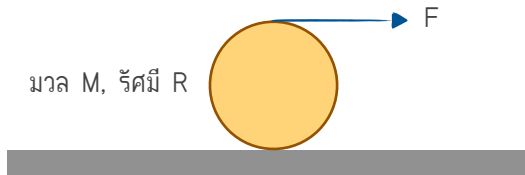
- เมื่อพื้นไม่มีความเสียดทาน จงหาขนาดความเร่งของวัตถุ?
- สัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างพื้นกับวัตถุต้องเป็นเท่าใด วัตถุจึงกลิ้งรอบจุดศูนย์กลางมวลด้วยความเร่งเท่ากับข้อ a)?

Answer : a) $\frac{2}{3}g\sin\theta$ and b) $\frac{1}{3}\tan\theta$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.151 Challenge

ออกแรง F กระทำกับทรงกระบอกตันรัศมี R มวล M กระจายสม่ำเสมอ ให้กลิ้งโดยไม่ไถลไปตามพื้นในแนวระดับ (พื้นไม่ลื่น) ดังรูปด้านล่าง จงหา



- ความเร่งที่จุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอกตัน?
- ขนาดของแรงเสียดทาน?
- ขนาดความเร็วที่จุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอกตัน เมื่อทรงกระบอกดังกล่าวกลิ้งไปเป็นระยะทาง d (เริ่มเคลื่อนที่จากหยุดนิ่ง)?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Answer : a) $\frac{4F}{3M}$, b) $\frac{F}{3}$ and c) $\sqrt{\frac{8Fd}{3M}}$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

พิจารณา

$$\Sigma \vec{\tau} = I \vec{\alpha}$$

$$\Sigma \vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\Sigma \vec{\tau} = \frac{dI\vec{\omega}}{dt}$$

$$\Sigma \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad ; \quad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\Sigma \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\Sigma \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

พิจารณา

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

$$\therefore \Sigma \left(\frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right) = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\Sigma \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad ; \quad \text{วัตถุแข็งเกร็ง} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$$

$$\therefore \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$





โมเมนตัมเชิงมุม (Angular Momentum)

โมเมนตัมเชิงมุม (Angular Momentum ; $\vec{L}$ [$\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$]) คือ ปริมาณทางฟิสิกส์เชิงเวกเตอร์ซึ่งบอกถึงความสามารถในหมุนรอบแกนหมุนของวัตถุ

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{และ} \quad \Sigma \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

I คือ โมเมนต์ความเฉื่อย

ω คือ อัตราเร็วเชิงมุม

$\vec{r}$ คือ เวกเตอร์ที่ชี้จากแกนหมุนไปยังตำแหน่งของวัตถุ

$\vec{p}$ คือ โมเมนตัมเชิงเส้น

$\vec{\tau}$ คือ ทอร์ก

t คือ เวลา

Problem 7.152 Challenge

จานทรงบอกตันมวล M กระจายสม่ำเสมอรัศมี R มีความเร็วที่ขอบนอกสุดของจานขนาด v ในทิศตามแนวเส้นสัมผัสของจาน จงหาขนาดโมเมนตัมเชิงมุมของจานดังกล่าว?

$$\text{Answer : } \frac{1}{2}MRv$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.153 Challenge

จงแสดงว่า $K_r = \frac{|\vec{L}|^2}{2I}$ เมื่อ K_r คือ พลังงานจลน์ในการหมุน, $\vec{L}$ คือ โมเมนตัมเชิงมุม และ I คือ โมเมนต์ความเฉื่อย?

Answer : $\frac{|\vec{L}|^2}{2I}$

Problem 7.154 Challenge

จงหาโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคเทียบกับจุด $1.0\hat{i} - 1.0\hat{j}$ m เมื่ออนุภาคมีมวล 0.50 kg อยู่ที่ตำแหน่ง $2.0\hat{i} + 1.0\hat{j}$ m และมีความเร็ว $4.0\hat{i} + 2.0\hat{j}$ m/s?

Answer : $-3.0 \hat{k}$ kg·m²/s

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.155 Challenge

วัตถุถูกแรงกระทำจนทำให้เกิดทอร์กตามสมการ $\tau = 2(t + 1)\hat{k}$ เมื่อ t คือ เวลาในหน่วย s และ τ คือ ทอร์กในหน่วย N·m ถ้าเวลาผ่านไป 2 s โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุจะเปลี่ยนไปเท่าใด?

Answer : $8 \hat{k} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

Problem 7.156 Challenge

วัตถุมวล 2.00 kg มีสมการของตำแหน่งเป็น $\vec{r} = 5.00\hat{i} + 5.00t\hat{j} \text{ m}$ เมื่อ t คือ เวลาในหน่วย s จงหาโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุที่เวลาใดๆ?

Answer : $50.0 \hat{k} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.157 Challenge

วัตถุมวล m ผูกด้วยเชือกมวลเบามากยาว ℓ ถ้าแกว่งวัตถุให้หมุนเป็นวงกลมสม่ำเสมอในแนวระดับ โดยเชือกเอียงทำมุมคงที่ θ เทียบกับแนวดิ่ง จงหาขนาดโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุดังกล่าว?

$$\text{Answer : } \sqrt{m^2 g \ell^3 \sin^3 \theta \tan \theta}$$

Problem 7.158 Challenge

โยนวัตถุเล็กๆ มวล m ด้วยความเร็วต้นขนาด u ทำมุม θ กับแนวระดับ เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ไปถึงจุดสูงสุด วัตถุจะมีขนาดของโมเมนตัมเชิงมุมเทียบกับตำแหน่งที่โยนวัตถุเป็นเท่าใด?

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

$$\text{Answer : } \frac{\mu^3 \sin^2 \theta \cos \theta}{2g}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

พิจารณาในกรณี $\Sigma \vec{\tau} = 0$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

แสดงว่า $\Sigma \vec{L} = \text{คงที่}$

$$\therefore \Sigma \vec{L}_f = \Sigma \vec{L}_i$$



การอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

เมื่อทอร์กลัพธ์ที่กระทำกับระบบเป็นศูนย์ (ระบบอยู่ในสมดุลการหมุน) โมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบจะอนุรักษ์ (โมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบจะคงที่ตลอดเวลา) เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\text{เมื่อ } \Sigma \vec{\tau} = 0 \quad \text{จะได้ว่า } \Sigma \vec{L}_f = \Sigma \vec{L}_i$$

 $\Sigma \vec{\tau}$ คือ ทอร์กลัพธ์ของระบบ $\Sigma \vec{L}_f$ คือ โมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบในตอนสุดท้ายที่พิจารณา $\Sigma \vec{L}_i$ คือ โมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบในตอนเริ่มต้นที่พิจารณา

หนึ่งในรูปแบบปัญหาที่นิยมใช้การอนุรักษ์เชิงมุมมาแก้ปัญหา คือ ปรากฏการณ์ที่ระบบมีการเปลี่ยนรูปร่างตัวเองโดยไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำ



Problem 7.159 Challenge

วัตถุโมเมนต์ความเฉื่อย I_1 หมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ ω ถ้าเติมโมเมนต์ความเฉื่อยเพิ่มเข้าไปในระบบเพิ่มขึ้นอีก I_2 โดยทอร์กยังคงเป็นศูนย์ ระบบจะมีอัตราเร็วเชิงมุมขนาดเท่าใด?

$$\text{Answer : } \frac{I_1 \omega}{I_1 + I_2}$$

Problem 7.160 Challenge

ระบบอนุภาคสองอนุภาคประกอบด้วยอนุภาคมวล m อยู่ที่ตำแหน่ง $(-d, 0, 0)$ และมวล $4m$ อยู่ที่ตำแหน่ง $(4d, 0, 0)$ ระบบนี้หมุนรอบแกน y ด้วย ความเร็วเชิงมุมขนาด ω ถ้ามวล $4m$ ขยับเข้ามาอยู่ที่ตำแหน่ง $(d, 0, 0)$ ความเร็วเชิงมุมของระบบนี้จะมีขนาดเป็นเท่าใด?

$$\text{Answer : } 13\omega$$

Problem 7.161 Challenge

นิสิตคนหนึ่งนั่งอยู่บนเก้าอี้ซึ่งหมุนได้คล่องโดยไม่มีความฝืด ขณะที่นิสิตคนนี้นั่งทอดกอดอก และหมุนเก้าอี้ดังกล่าว ถ้านิสิตคนนี้กางแขนออกเก้าอี้จะหมุนช้าลงหรือเร็วขึ้น?

Answer : หมุนช้าลง

Problem 7.162 Challenge

ปาก่อนดินน้ำมันเล็กๆ มวล 10.0 g ด้วยอัตราเร็ว 5.00 m/s เข้าหาจานหมุนทรงกระบอกตันในแนวเส้นสัมผัสวงกลม โดยจานหมุนสามารถหมุนได้โดยไม่มีความฝืดรอบแกนหมุนซึ่งผ่านศูนย์กลางมวลและตั้งฉากกับระนาบของจานหมุน ถ้าจานหมุนมีมวล 1.00 kg กระจายสม่ำเสมอ รัศมี 0.500 m และเริ่มต้นจากหยุดนิ่ง ถ้าก้อนดินน้ำมันนี้ไปติดอยู่ที่ขอบของจานหมุนดังกล่าวพอดี จงหาขนาดของอัตราเร็วเชิงมุมของจานหมุนภายหลังจากที่ดินน้ำมันติดไปกับจานหมุน?

Answer : 0.196 rad/s

Problem 7.163 Challenge

ยิงวัตถุเล็กๆ มวล m ด้วยอัตราเร็ว u เข้าชนปลายแท่งวัตถุมวล M ยาว l หลังการชน มวล m ติดไปกับปลายแท่งวัตถุ ทำให้วัตถุหมุนรอบจุดศูนย์กลางมวลของแท่งวัตถุดังกล่าว พลังงานจลน์ของระบบเปลี่ยนแปลงไปเท่าใด?

$$\text{Answer : } -\frac{mMu^2}{2(3m + M)}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

Problem 7.164 Challenge

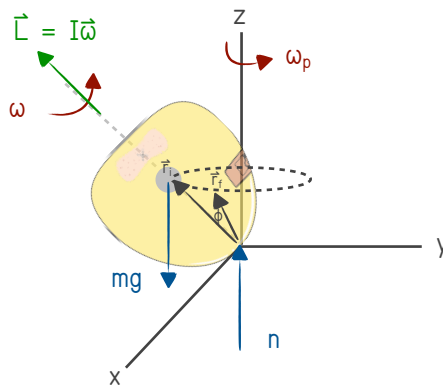
ยิงวัตถุเล็กๆ มวล m ด้วยอัตราเร็ว u เข้าชนปลายด้านล่างของแท่งวัตถุมวล M ยาว ℓ ซึ่งมีจุดหมุนอยู่ที่ปลายด้านบนของแท่งวัตถุ หลังการชน มวล m ติดไปกับปลายด้านล่างของแท่งวัตถุ หลังจากการชนวัตถุจะหมุนท่ามมได้มากที่สุดเท่าใด?

$$\text{Answer : } \cos^{-1}\left(1 - \frac{3m^2u^2}{(3m + M)(2m + M)g\ell}\right)$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

การเคลื่อนที่ของลูกข่าง (The Motion of Tops)

พิจารณาลูกข่างมวล m ซึ่งปลายของลูกข่างอยู่ที่จุดกำเนิด ลูกข่างดังกล่าวมี
 เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลเป็น $\vec{r}$ หมุนรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุม
 ω และหมุนควง (Precession) รอบแกน z ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω_p ดังรูปด้านล่าง



จะได้

$$\phi = \frac{|\Delta \vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

$$\phi = \frac{|\Delta \vec{L}|}{|\vec{L}|} \quad ; \quad \vec{L} \text{ มีทิศเดียวกับ } \vec{r}$$

เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงในช่วงมุม ϕ น้อยๆ ($\omega_p \ll \omega$)

จะได้

$$d\phi \approx \frac{|d\vec{L}|}{|\vec{L}|}$$

$$\frac{d\phi}{dt} \approx \frac{1}{|\vec{L}|} \frac{d\vec{L}}{dt}$$

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

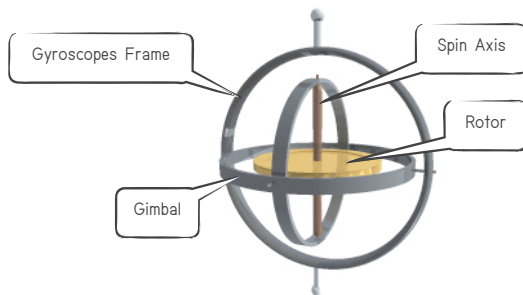
$$\omega_p \approx \frac{|\vec{\tau}|}{|\vec{L}|} \quad ; \quad \omega_p = \frac{d\phi}{dt} \text{ และ } \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\omega_p \approx \frac{|\vec{r} \times m\vec{g}|}{I\omega} \quad ; \quad |\vec{\tau}| = |\vec{r} \times m\vec{g}| \text{ และ } L = I\omega$$

$$\therefore \omega_p \propto \frac{1}{\omega}$$

ดังนั้น เมื่อลูกข่างหมุนรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมที่มากขึ้น (ω มากขึ้น) ลูกข่างจะหมุนควงด้วยอัตราเร็วเชิงมุมที่น้อยลง (ω_p น้อยลง)

มีการนำหลักการเดียวกับการเคลื่อนที่ของลูกข่างมาใช้กับ “ไจโรสโคป (Gyroscopes)” ดังรูปด้านล่าง



รูปภาพจาก : www.wikipedia.org

เมื่อ Rotor หมุนรอบ Spin Axis ทำให้ไจโรสโคปมีโมเมนตัมเชิงมุมในทิศตามแนว Spin Axis เมื่อมีทอร์กกระทำกับไจโรสโคปจะเกิดการหมุนควงขึ้น ทำให้สามารถวิเคราะห์ทิศทางของแรงที่มากกระทำกับไจโรสโคปได้ ซึ่งนำไปสู่การวิเคราะห์หาทิศทางในการเคลื่อนที่ของไจโรสโคป

การเคลื่อนที่ในสองมิติ (Motion in Two Dimension)

