

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)



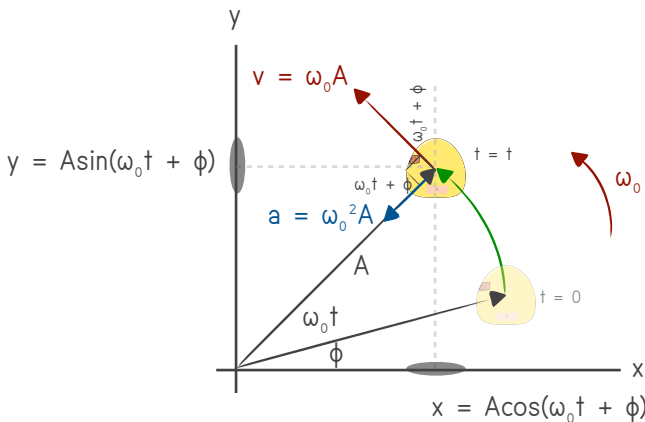
รูปภาพจาก : www.pixabay.com

บทที่ 8 การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

หนึ่งในรูปแบบการเคลื่อนที่ที่ต้องใช้คณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อนในการอธิบาย คือ การเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนที่กลับไปกลับมาในเส้นทางเดิมๆ หรือเรียกว่าการสั่น ในบทนี้จะอธิบายการนำฟังก์ชันตรีโกณมิติมาใช้ร่วมกับกฎทางฟิสิกส์เพื่ออธิบายการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

ภาพฉายเงาของการเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอ (Projection of Uniform Circular Motion)

พิจารณาเงาของวัตถุมวล m บนแกน x และแกน y ขณะที่วัตถุกำลังเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ ω_0 และรัศมีคงที่ A โดยที่เวลา $t = 0$ วัตถุอยู่ที่มุม ϕ เทียบกับแกนอ้างอิง ดังรูปด้านล่าง ซึ่งเงาของวัตถุจะเคลื่อนที่กลับไปกลับมาด้วยคาบคงที่ $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ และแอมพลิจูด (Amplitude) คงที่ A รอบๆ ตำแหน่งสมดุล (ตำแหน่งสมดุล คือ ตำแหน่งซึ่งมีแรงลัพธ์กระทำต่อวัตถุเป็นศูนย์ และความเร่งของวัตถุเป็นศูนย์) เราเรียกการเคลื่อนที่ในลักษณะนี้ว่าการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion : SHM)



พิจารณาเงาของวัตถุบนแกน x

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$v_x = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$a_x = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

พิจารณาเงาของวัตถุบนแกน y

$$y = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$v_y = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$a_y = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

$$\therefore \quad a_x = -\omega_0^2 x \quad \text{และ} \quad a_y = -\omega_0^2 y$$

$$a_x + \omega_0^2 x = 0 \quad a_y + \omega_0^2 y = 0$$

จาก $v_x^2 + \omega_0^2 x^2 = (-\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi))^2 + \omega_0^2 (A \cos(\omega_0 t + \phi))^2$

$$v_x^2 + \omega_0^2 x^2 = \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) + \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$v_x^2 + \omega_0^2 x^2 = \omega_0^2 A^2 (\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2(\omega_0 t + \phi))$$

$$v_x^2 + \omega_0^2 x^2 = \omega_0^2 A^2$$

$$v_x = \omega_0 \sqrt{A^2 - x^2}$$

และ $v_y^2 + \omega_0^2 y^2 = (-\omega_0 A \cos(\omega_0 t + \phi))^2 + \omega_0^2 (A \sin(\omega_0 t + \phi))^2$

$$v_y^2 + \omega_0^2 y^2 = \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) + \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$v_y^2 + \omega_0^2 y^2 = \omega_0^2 A^2 (\cos^2(\omega_0 t + \phi) + \sin^2(\omega_0 t + \phi))$$

$$v_y^2 + \omega_0^2 y^2 = \omega_0^2 A^2$$

$$v_y = \omega_0 \sqrt{A^2 - y^2}$$



การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion ; SHM)



การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

เมื่อสมการอยู่ในรูป $a_x + \omega_0^2 x = 0$ หรือ $a_x = -\omega_0^2 x$; ω_0 คงที่

$\therefore x$ จะเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

มีผลเฉลยเป็น

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\text{หรือ } x = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$v = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$v = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$a = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$a = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

t คือ เวลา

x คือ การกระจัดของวัตถุเทียบกับตำแหน่งสมดุลที่เวลา t ใดๆ

v คือ ความเร็วของวัตถุที่เวลา t ใดๆ

a คือ ความเร่งของวัตถุที่เวลา t ใดๆ

A คือ แอมพลิจูดในการเคลื่อนที่

ϕ คือ เฟสเริ่มต้น

ω_0 คือ ความถี่เชิงมุม (คงที่) โดย $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

T คือ คาบในการเคลื่อนที่ของวัตถุ

f คือ ความถี่ในการเคลื่อนที่ของวัตถุ

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

ความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของความเร็วกับการกระจัดของวัตถุ

$$v = \omega_0 \sqrt{A^2 - x^2}$$

v คือ ขนาดความเร็วของวัตถุ

x คือ การกระจัดของวัตถุเทียบกับตำแหน่งสมดุล

ข้อสังเกต

ตำแหน่งสมดุล คือ ตำแหน่งซึ่งมีแรงลัพธ์กระทำต่อวัตถุเป็นศูนย์ และ ความเร่งของวัตถุเป็นศูนย์

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย คือ การเคลื่อนที่กลับไปกลับมาซ้ำ รอยเดิมผ่านตำแหน่งสมดุล โดยมีคาบและแอมพลิจูดคงที่

การกระจัดและความเร่งของวัตถุที่เคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายมีทิศตรงข้ามกันเสมอ

ความเร่ง ความเร็ว และการกระจัด ของการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่าง ง่ายไม่คงที่

การกระจัดและความเร็วของวัตถุที่เคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายอาจมีทิศ เดียวกันหรือตรงข้ามกันก็ได้

คาบของการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายไม่ขึ้นกับแอมพลิจูด

อาจใช้ผลเฉลยในรูป $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่



การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

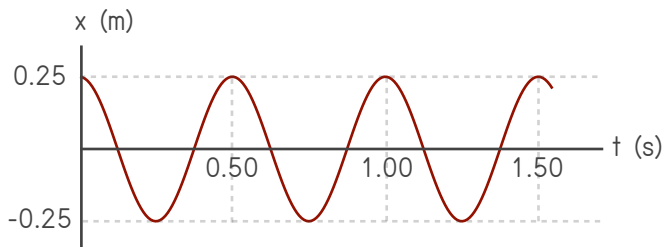
Problem 8.1

ในการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ความเร่งของวัตถุจะมีเฟสหน้าหน้าความเร็วของวัตถุอยู่เท่าใด?

Answer : 90°

Problem 8.2

ในการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายของอนุภาคหนึ่ง มีความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดกับเวลาดังกราฟด้านล่าง ความเร่งของอนุภาคดังกล่าวที่เวลา 0.25 s เป็นเท่าใด?



Answer : $4\pi^2 \text{ m/s}^2$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.3

ความเร็วสูงสุดของวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายด้วยคาบ 0.20 s และแอมพลิจูด 2.0 cm เป็นเท่าใด?

Answer : 0.2π m/s

Problem 8.4

อนุภาคเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ด้วยความเร็วสูงสุดขนาด 20 m/s และมีความเร่งสูงสุดขนาด 80 m/s^2 อนุภาคนี้อาจมีคาบการเคลื่อนที่เท่าใด?

Answer : $\frac{\pi}{2}$ s

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.5

แผ่นไม้เคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย 7.0 รอบในเวลา 20 s ด้วยแอมพลิจูด 1.0 m ถ้าวางวัตถุบนแผ่นไม้ดังกล่าว จงหาค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานน้อยสุดที่จะทำให้วัตถุไม่ไถลไปบนแผ่นไม้ดังกล่าว?

Answer : 0.49

Problem 8.6

วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมสม่ำเสมอบนระนาบ xy รัศมีคงที่ π m และคาบ π s ที่ตำแหน่ง $\frac{\pi}{2}$ m เงามองวัตถุบนแกน x จะมีความเร็วขนาดเท่าใด?

Answer : $\pi\sqrt{3}$ m/s

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.7

อนุภาคเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ที่การกระจัดเท่ากับ 0.20 m มีความเร็วเท่ากับ 0.40 m/s ที่การกระจัดเท่ากับ 0.40 m มีความเร็วเท่ากับ 0.20 m/s ที่การกระจัดเท่ากับ 0.30 m อนุภาสดังกล่าวจะมีความเร็วขนาดเท่าใด?

Answer : 0.33 m/s

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.8

วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมสม่ำเสมอด้วยความถี่ f รัศมีวงที่ R ที่การกระจัด l ขนาดความเร่งของวัตถุจะเป็นกี่เท่าของขนาดความเร่งของเงาวัตถุ?

Answer : $\frac{R}{l}$

Problem 8.9

วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมสม่ำเสมอบนระนาบ xy ด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ $\frac{\pi}{4}$ rad/s รัศมีวงที่ 7.00 m โดยจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุดกำเนิด และที่เวลา $t = 0$ วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง (0 m, 7.00 m) จงหาตำแหน่งของเงาวัตถุบนแกน y และขนาดความเร็วของเงาวัตถุบนแกน y ที่เวลา $t = 7.00$ s?

Answer : $y = 4.95$ m and $|v| = 3.89$ m/s #

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.10

วัตถุมวล 0.10 kg เคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายบนแนวแกน x ตามสมการ
 $x = (15 \text{ cm})\cos(10\pi t)$ จงหา

- a) แอมพลิจูดของวัตถุ?
- b) ความถี่ในการเคลื่อนที่?
- c) คาบในการเคลื่อนที่?

Answer : a) 15 cm, b) 5.0 Hz and c) 0.20 s

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.11

วัตถุมวล 50 g เคลื่อนที่ตามสมการ $x = 5.0\cos(5\pi t)$ cm เมื่อเวลาผ่านไป 0.60 s วัตถุจะเคลื่อนที่เป็นระยะทางเท่าใด?

Answer : 30 cm

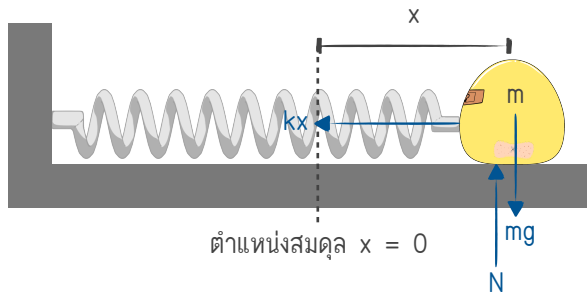
Problem 8.12

วัตถุเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายด้วยความถี่เชิงมุม 3.0 rad/s โดยเริ่มสิ้นจากการกระจัด 10 cm และความเร็วต้น 0.40 m/s เมื่อพิจารณาว่าวัตถุเคลื่อนที่ตามสมการ $x = A\sin(\omega_0 t + \phi)$ เฟสเริ่มต้นจะเป็นเท่าใด?

Answer : 37°

การเคลื่อนที่ของวัตถุติดสปริง (Motion of an Object Attached to a Spring)

พิจารณาวัตถุมวล m ติดกับสปริงเบาซึ่งมีค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ k และอยู่บนพื้นลื่น เมื่อวัตถุถูกดึงออกมา (หรือกดเข้าไป) เป็นระยะ A เมื่อปล่อยวัตถุ แรงดึงกลับของสปริงทำให้วัตถุเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายด้วยแอมพลิจูด A ดังรูปด้านล่าง



จาก

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$-kx = ma_x$$

$$a_x + \frac{k}{m}x = 0$$

$$a_x + \omega_0^2 x = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\therefore$ วัตถุเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

$$\therefore x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\text{หรือ } y = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$v_x = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$v_y = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$a_x = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$a_y = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

จาก

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ 2\pi f &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}\end{aligned}$$

จาก

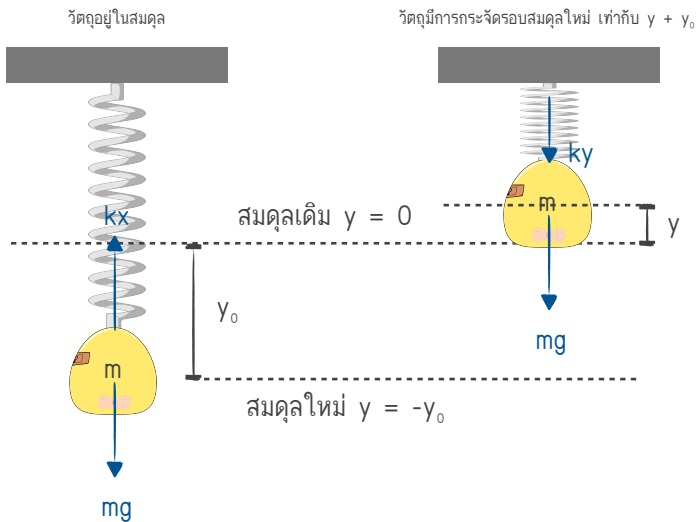
$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \frac{2\pi}{T} &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}\end{aligned}$$

จาก

$$\begin{aligned}E &= K + U \\ E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ E &= \frac{1}{2}m\omega_0^2(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}kx^2 \\ E &= \frac{1}{2}m\left(\frac{k}{m}\right)(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}kx^2 \\ E &= \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ E &= \frac{1}{2}kA^2\end{aligned}$$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

พิจารณาวัตถุมวล m ติดกับสปริงเบาซึ่งมีค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ k และอยู่ในแนวดิ่ง เมื่อวัตถุถูกกดเข้าไปเป็นระยะ A และปล่อยวัตถุ แรงดึงกลับของสปริงทำให้วัตถุเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายด้วยแอมพลิจูด A ดังรูปด้านล่าง



พิจารณากรณีที่วัตถุอยู่ในตำแหน่งสมดุล

จาก

$$\Sigma F_y = 0$$

$$ky_0 - mg = 0$$

$$y_0 = \frac{mg}{k}$$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

พิจารณาวัตถุซึ่งมีการกระจัดรอบสมดุลใหม่ เท่ากับ $y + y_0$

จาก

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$-ky - mg = ma_y$$

$$a_y + \frac{k}{m}y + g = 0$$

$$a_y + \frac{k}{m}y + \frac{k}{m}y_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = \frac{mg}{k} = \text{คงที่}$$

$$a_y + \frac{k}{m}(y + y_0) = 0$$

$$a_y + \omega_0^2(y + y_0) = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

พิจารณา

$$\frac{\Delta(y + y_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\left(\frac{\Delta(y + y_0)}{\Delta t}\right)}{\Delta t} = \frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)}{\Delta t}$$

$$a_{y + y_0} = a_y$$

$$\therefore a_{y + y_0} + \omega_0^2(y + y_0) = 0 = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\therefore y$ จะเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายรอบๆ y_0 ด้วยความถี่เชิงมุม $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
เช่นเดียวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุติดสปริงในแนวราบ

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)



การเคลื่อนที่ของวัตถุติดสปริง

วัตถุติดสปริงจะเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย โดยมี $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

T คือ คาบในการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดย $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

f คือ ความถี่ในการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดย $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

พลังงานงานกลของวัตถุคงที่ $E = \frac{1}{2}kA^2$

E คือ พลังงานกลของวัตถุ

k คือ ค่าคงที่ของสปริง

A คือ แอมพลิจูดในการเคลื่อนที่

Problem 8.13

วัตถุมวล 0.40 kg อยู่บนพื้นลื่นติดกับสปริงมวลเบา เมื่อดึงออกมาจากสมดุลด้วยแรง 16 N ทำให้สปริงยืดออกมาเป็นระยะ 10 cm เมื่อปล่อยวัตถุ วัตถุดังกล่าวจะสั่นด้วยความถี่เท่าใด?

Answer : $\frac{10}{\pi}$ Hz

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.14

วัตถุมวล m แขนงอยู่กับสปริงเบาในแนวดิ่ง ถูกทำให้สั่นขึ้นลงด้วยความถี่ f ถ้าเปลี่ยนมวลให้ลดลงครึ่งหนึ่งจากเดิม วัตถุจะสั่นด้วยความถี่เท่าใด?

Answer : $\sqrt{2}f$

Problem 8.15

แขวนวัตถุมวล 2.0 kg กับสปริงเบา ทำให้สปริงยืดออกจากเดิมเป็นระยะ 0.25 m ถ้าออกแรงดึงสปริงให้ยืดจากเดิมอีก 0.10 m สปริงจะสั่นเป็นเวลาเท่าใดจึงกลับสู่ตำแหน่งสมดุล?

Answer : 0.25 s

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.16

มวล m_1 ติดกับสปริงเบาในแนวดิ่ง ทำให้สปริงยืดออกจากเดิม 16 cm มวล m_2 ติดกับสปริงอีกอันในแนวดิ่ง ทำให้สปริงยืดออกจากเดิม 25 cm เมื่อสั่นมวลทั้งสอง คาบการสั่นของมวล m_1 จะเป็นกี่เท่าของคาบการสั่นของมวล m_2 ?

Answer : 0.8

Problem 8.17

วัตถุอยู่บนพื้นลื่นติดกับสปริงเบา กำลังเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย โดยมีอัตราเร็วสูงสุดเท่ากับ 2.0 m/s และมีการกระจัดจากสมดุลมากที่สุดเท่ากับ 0.5 m ความถี่เชิงมุมในการสั่นนี้เป็นเท่าใด?

Answer : 4 rad/s

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.18

วัตถุมวล 1.0 kg แขนงอยู่กับสปริงเบาในแนวดิ่ง เมื่อทำให้วัตถุดังกล่าวลั่น ในแนวดิ่ง ปรากฏว่าวัตถุสั้นด้วยคาบ $\frac{\pi}{5}$ s ตอนที่วัตถุยังไม่ได้มีการสั้น สปริงยืดออกจากสมดุลเดิมเป็นระยะเท่าใด?

Answer : 9.8 cm

Problem 8.19

วัตถุมวล 4.00 kg ติดกับสปริงเบาและวางอยู่บนพื้นลื่น ถูกทำให้สั้นแบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย โดยมีแอมพลิจูดเท่ากับ 6.00 cm และคาบเท่ากับ 3.00 s จงหา

- ค่าคงที่ของสปริง?
- ขนาดความเร็วสูงสุดในการเคลื่อนที่?
- ขนาดความเร่งสูงสุดในการเคลื่อนที่?

Answer : a) 17.5 N/m, b) 0.126 m/s and c) 0.263 m/s²

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.20

มวลวัตถุ 0.500 kg กับสปริงเบา ทำให้สปริงยืดออกจากเดิมเป็นระยะ 2.50 cm ถ้าออกแรงดึงสปริงให้ยืดจากเดิมอีก 5.00 cm แล้วปล่อย จงหา

- คาบในการสั่นของวัตถุ?
- ขนาดความเร็วสูงสุดในการเคลื่อนที่?
- ขนาดความเร่งสูงสุดในการเคลื่อนที่?
- ขนาดความเร็วที่ตำแหน่ง 4.00 cm จากสมดุล?
- ขนาดความเร่งที่ตำแหน่ง 4.00 cm จากสมดุล?

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Answer : a) 0.317 s, b) 0.990 m/s, c) 19.6 m/s²,
d) 0.595 m/s and e) 15.7 m/s²

Problem 8.21

วัตถุติดสปริงเบาเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายด้วยแอมพลิจูดขนาด A ที่พลังงานจลน์เท่ากับพลังงานศักย์ การกระจัดของวัตถุมีขนาดเท่าใด?

Answer : $\frac{A}{\sqrt{2}}$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

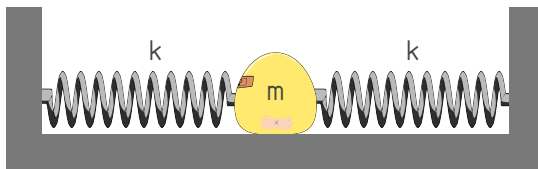
Problem 8.22

วัตถุติดสปริงเบาเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ที่ตำแหน่งซึ่งมีการกระจัดเป็นครึ่งหนึ่งของแอมพลิจูด อัตราส่วนพลังงานจลน์ต่อพลังงานกลเป็นเท่าใด?

Answer : $\frac{3}{4}$

Problem 8.23

วัตถุมวล m ติดกับสปริงเบาและวางบนพื้นราบลื่น ดังรูปด้านล่าง ถ้าทำให้วัตถุสั่นแบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย วัตถุจะสั่นด้วยความถี่เท่าใด?

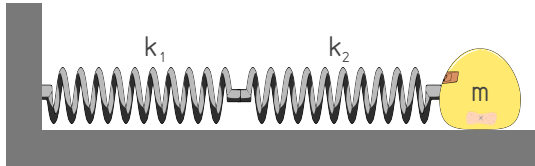


Answer : $\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{2m}}$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.24

วัตถุมวล m ติดกับสปริงเบาและวางบนพื้นราบลื่น ดังรูปด้านล่าง ถ้าทำให้วัตถุสั่นแบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย วัตถุจะสั่นด้วยคาบเท่าใด?



$$\text{Answer : } 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$$

Problem 8.25

วัตถุมวล m แขนงอยู่กับระบบสปริงเบาในแนวดิ่ง ถูกทำให้สั่นขึ้นลงแบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย โดยระบบสปริงดังกล่าวประกอบด้วยสปริงซึ่งมีค่าคงที่ของสปริง k สองอันต่อกันแบบอนุกรม ความถี่เชิงมุมในการสั่นจะเป็นเท่าใด?

$$\text{Answer : } \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.26 Challenge

วัตถุมวล m ติดกับสปริงเบาอยู่บนพื้นเอียงลื่น โดยพืดกลางเอียงทำมุม θ เทียบกับแนวนอน ถ้าที่ตำแหน่งสมดุลสปริงจะยืดออกมาเป็นระยะ x_0 ถ้าสปริงถูกดึงให้ยืดออกจากสมดุลเป็นระยะ A คาบในการสั่นจะเป็นเท่าใด?

$$\text{Answer : } 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g\sin\theta}}$$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

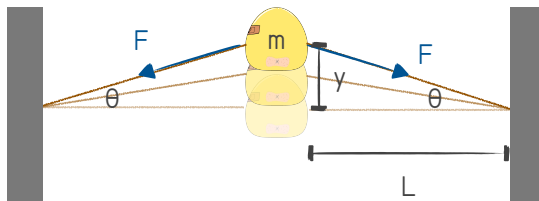
Problem 8.27

วัตถุมวล 2.0 kg ติดกับแท่งโลหะเบาซึ่งวางตั้งในแนวราบ ออกแรงดึงวัตถุในแนวราบด้วยแรง 10 N ทำให้วัตถุยับออกมา 5.0 mm เมื่อปล่อยวัตถุ วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยคาบเท่าใด?

Answer : 0.20 s

Problem 8.28 Challenge

วัตถุมวล m เล็กๆ ผูกติดกับผนังด้วยเชือกสองเส้นยาวเส้นละ L และมีแรงดึงในเส้นเชือกเท่ากับ F ทั้งสองเส้น โดยแรง F มีขนาดมากกว่าน้ำหนักของวัตถุมากๆ ถ้าวัตถุมวล m ขึ้นมาเป็นระยะ y โดย y น้อยกว่า L มากๆ ดังรูปด้านล่าง จงหาคาบการเคลื่อนที่ดังกล่าว?



การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

$$\text{Answer : } \pi \sqrt{\frac{2mL}{F}}$$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.29 Challenge

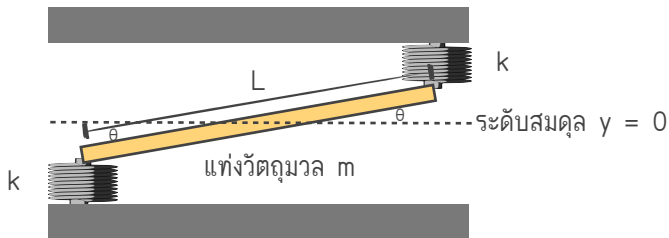
สมมติว่ามีอุโมงค์เส้นตรงวางตัวในแนวผ่านศูนย์กลางของโลก โดยมีปากอุโมงค์ทั้งสองฝั่งอยู่ที่ผิวเปลือกโลกพอดี เมื่อปล่อยมวล m จากปากอุโมงค์อีกฝั่งหนึ่ง คำนวณการเคลื่อนที่ของมวล m เป็นเท่าใด? (กำหนดให้โลกมีความหนาแน่นสม่ำเสมอเท่ากับ ρ)?

Answer : $\sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.30 Challenge

แท่งวัตถุมวล m กระจายสม่ำเสมอ ยาว L มีสปริงมวลเบามาก ซึ่งมีค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ k ติดอยู่ที่ปลายวัตถุทั้งสองด้าน ดังรูปด้านล่าง ถ้ากดปลายวัตถุด้านหนึ่งทำให้วัตถุเอียงทำมุมน้อยมากๆ วัตถุดังกล่าวจะหมุนกลับไปกลับมาด้วยคาบเท่าใด?

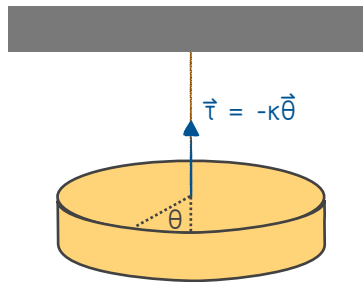


$$\text{Answer : } \pi \sqrt{\frac{2m}{3k}}$$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.31 Challenge (Torsional Pendulum)

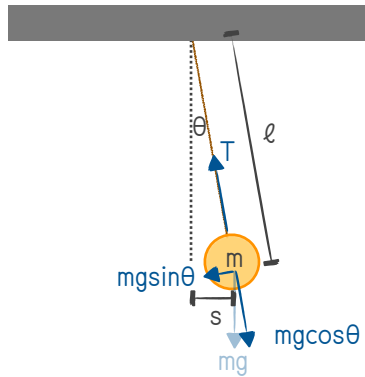
งานแบนโมเมนต์ความเฉื่อย I ถูกบิดด้วยมุม θ จากแนวเดิม โดยมุม θ น้อยมากๆ ส่งผลให้เกิดทอร์กเนื่องจากแรงบิดจากเชือกมากระทำตามสมการ $\tau = -k\theta$ เมื่อ k คือ ค่าคงที่ซึ่งมากกว่าศูนย์ และ θ คือ การกระจัดในเชิงมุม จงหาคาบการสั่นของวัตถุดังกล่าว?



Answer : $2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$

ลูกตุ้มอย่างง่าย (Simple Pendulum)

พิจารณาจุดวัตถุมวล m ผูกติดกับเชือกเบายาว ℓ และไร้แรงต้านอากาศใดๆ เข้ามารบกวณ เมื่อวัตถุถูกดึงออกมาด้วยมุม θ_0 โดยที่มุม θ_0 มีขนาดเล็กมากๆ เมื่อปล่อยวัตถุ แรงโน้มถ่วงดึงวัตถุกลับไปกลับมารอบตำแหน่งสมดุล ทำให้วัตถุเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายด้วยแอมพลิจูด θ_0 ดังรูปด้านล่าง



จาก $\Sigma F_s = ma_s$
 $-mg \sin \theta = ma_s$
 $a_s + g \sin \theta = 0$

ที่มุม θ น้อยๆ จะประมาณได้ว่า $\sin \theta \approx \theta$

จะได้ $a_s + g\theta = 0$

$$a_s + g\left(\frac{s}{\ell}\right) = 0$$

$$a_s + \frac{g}{\ell}s = 0$$

$$a_s + \omega_0^2 s = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

จาก

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$2\pi f = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

จาก

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$\therefore$

$$s = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$v = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$a = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

จาก

$$E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2(A^2 - s^2) + mg\ell(1 - \cos\theta)$$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{g}{\ell}\right)(A^2 - s^2) + mg\ell(1 - \cos\theta)$$

$$E = \frac{mgA^2}{2\ell} - \frac{mgs^2}{2\ell} + mg\ell(1 - \cos\theta)$$

จาก $\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$$

$\therefore \cos\theta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

จะได้ $E = \frac{mgA^2}{2\ell} - \frac{mgs^2}{2\ell} + mg\ell(1 - (1 - 2\sin^2(\frac{\theta}{2})))$

$$E = \frac{mgA^2}{2\ell} - \frac{mgs^2}{2\ell} + 2mg\ell\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

ที่มุม θ น้อยๆ จะประมาณได้ว่า $\sin\theta \approx \theta$

จะได้ $E = \frac{mgA^2}{2\ell} - \frac{mgs^2}{2\ell} + 2mg\ell\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$

$$E = \frac{mgA^2}{2\ell} - \frac{mgs^2}{2\ell} + 2mg\ell\left(\frac{s}{2\ell}\right)^2 \quad ; \quad \theta = \frac{s}{\ell}$$

$$E = \frac{mgA^2}{2\ell} - \frac{mgs^2}{2\ell} + \frac{mgs^2}{2\ell}$$

$$E = \frac{mgA^2}{2\ell} \quad ; \quad \text{คงที่}$$

หรือ $E = \frac{1}{2}mg\ell\left(\frac{A}{\ell}\right)^2 = \frac{1}{2}mg\ell\theta_0^2$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)



การแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่าย

ลูกตุ้มอย่างง่ายเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย โดยมี $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

f คือ ความถี่ในการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดย $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

T คือ คาบในการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดย $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$

พลังงานกลของวัตถุคงที่ $E = \frac{mgA^2}{2\ell} = \frac{1}{2}mg\ell\left(\frac{A}{\ell}\right)^2 = \frac{1}{2}mg\ell\theta_0^2$

E คือ พลังงานกลของวัตถุ

m คือ มวลของวัตถุ

g คือ ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง

A คือ แอมพลิจูดในการเคลื่อนที่

ℓ คือ ระยะห่างระหว่างวัตถุกับจุดหมุน

θ_0 คือ แอมพลิจูดของมุมในการเคลื่อนที่

ข้อสังเกต

คาบการแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่ายไม่ขึ้นกับมวล และไม่ขึ้นกับมุมปล่อยเริ่มต้น (ขึ้นกับความยาวเชือก และความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง)



การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.32

ลูกตุ้มอย่างง่ายแกว่ง 100 รอบ ใช้เวลา 200 s มีความเร่งสูงสุดในการเคลื่อนที่เท่ากับ $\frac{\pi^2}{20} \text{ m/s}^2$ การกระจัดสูงสุดในการแกว่งนี้ประมาณเท่าใด?

Answer : 5.00 cm

Problem 8.33

ลูกตุ้มอย่างง่ายมวล 500 g แขนงไว้กับเชือกเบา ถ้าต้องการให้คาบในการแกว่งเท่ากับ 1.00 s พอดี เชือกดังกล่าวจะต้องยาวเท่าใด?

Answer : 24.8 cm

Problem 8.34

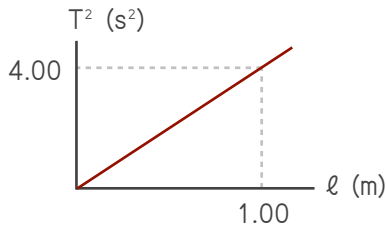
ในการทดลองแกว่งลูกตุ้มอย่างง่ายด้วยมุมน้อยๆ เมื่อวาดกราฟให้แกนนตั้งเป็นคาบในการแกว่ง (T) และแกนนอนเป็นรากที่สองของความยาวเชือก ($\sqrt{l}$) ความชันของกราฟจะเป็นเท่าใด

Answer : $\frac{2\pi}{\sqrt{g}}$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.35

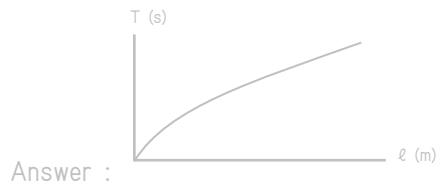
ในการทดลองแกว่งลูกตุ้มอย่างง่ายด้วยมุมน้อยๆ เมื่อวาดกราฟให้แกนตั้งเป็นคาบกำลังสอง (T^2) และแกนนอนเป็นความยาวเชือก (ℓ) จะได้กราฟดังรูปด้านล่าง ค่า g ที่ได้จากการทดลองดังกล่าวเป็นเท่าใด?



Answer : 9.87 m/s^2

Problem 8.36

ในการทดลองแกว่งลูกตุ้มอย่างง่ายด้วยมุมน้อยๆ เมื่อวาดกราฟให้แกนตั้งเป็นคาบในการแกว่ง (T) และแกนนอนเป็นความยาวเชือก (ℓ) จะได้กราฟรูปร่างใด?



Answer :

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.37

นาฬิกาลูกตุ้มอย่างง่ายเมื่อแกว่งที่ผิวโลกซึ่งมีค่า $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ จะมีคาบในการแกว่งเท่ากับ 2.0 s ถ้านำนาฬิกาลูกตุ้มดังกล่าวไปแกว่งที่ผิวดวงจันทร์ซึ่งมีค่า $g = 1.70 \text{ m/s}^2$ คาบการแกว่งจะเป็นเท่าใด?

Answer : 4.80 s

Problem 8.38

คาบการแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่ายเมื่อวัดบนผิวดาวดวงหนึ่งเป็นครึ่งหนึ่งของเมื่อวัดบนผิวโลก ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงบนผิวดาวดังกล่าวเป็นกี่เท่าของค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงบนผิวโลก?

Answer : 4

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.39

การทดลองการแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่ายบนผิวโลกมีคาบการแกว่ง 4.0 s ถ้านำชุดการทดลองดังกล่าวไปทำแบบเดียวกันบนดาวซึ่งมีมวลเป็น 64 เท่าของโลก และมีรัศมีเป็น 2 เท่าของโลก คาบการแกว่งจะเป็นเท่าใด?

Answer : 1.0 s

Problem 8.40

นำลูกตุ้มอย่างง่ายไปแกว่งบนผิวดวงจันทร์ซึ่งมีค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงเป็น $\frac{1}{6}$ เท่าของโลก ถ้าต้องการคาบในการแกว่งเท่ากับที่ผิวโลก จะต้องใช้เชือกของลูกตุ้มยาวเป็นกี่เท่าของเชือกลูกตุ้มที่ใช้บนโลก?

Answer : $\frac{1}{6}$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.41

ลูกตุ้มอย่างง่ายแกว่งด้วยมุมน้อยๆ ด้วยความถี่ f ถ้าใช้เชือกซึ่งมีความยาวเป็น 4 เท่าของความยาวเชือกเดิม ความถี่ในการแกว่งของลูกตุ้มจะเป็นเท่าใด?

Answer : $\frac{f}{2}$

Problem 8.42

ลูกตุ้มอย่างง่ายทำจากโลหะมีความหนาแน่นเป็น N เท่าของลูกตุ้มอย่างง่ายที่ทำจากไม้ เมื่อนำมาแกว่งด้วยมุมน้อยมากๆ และใช้เชือกซึ่งยาวเท่ากัน ความถี่ในการแกว่งของลูกตุ้มเหล็กจะเป็นกี่เท่าของความถี่ในการแกว่งของลูกตุ้มไม้?

Answer : 1

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.43

ชิงช้าแขวนด้วยสปริงสองอัน แต่ละอันมีค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ 200 N/m ถ้าความยาวเริ่มต้นของสปริงทั้งสองเท่ากับ 1.00 m เมื่อมีมวล 40.0 kg มาวางไว้บนชิงช้า และทำการแกว่งด้วยมุมน้อยๆ ชิงช้าดังกล่าวจะแกว่งด้วยความถี่เท่าใด?

Answer : 0.354 Hz

Problem 8.44

ลูกตุ้มอย่างง่ายสองลูกมีมวลเท่ากัน และมีความยาวเชือก $\ell_1 = 2\ell_2$ เมื่อแกว่งลูกตุ้มทั้งสองด้วยมุมน้อยๆ พบว่าความเร็วสูงสุดมีขนาดเท่ากัน แอมพลิจูดของลูกตุ้มความยาวเชือก ℓ_1 เป็นกี่เท่าของแอมพลิจูดลูกตุ้มความยาวเชือก ℓ_2 ?

Answer : $\sqrt{2}$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.45

ลูกตุ้มอย่างง่ายแขวนด้วยเชือกยาว 100 cm ดึงลูกตุ้มให้เบนออกจากแนวสมดุลเป็นระยะ 5.00 cm แล้วปล่อยให้ลูกตุ้มดังกล่าวแกว่งแบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ความเร็วสูงสุดในการแกว่งจะมีขนาดเท่าใด?

Answer : 0.157 m/s

Problem 8.46

นาฬิกาลูกตุ้มอย่างง่ายมีสายแขวนลูกตุ้มยาว 50.0 cm เมื่อแทนนาฬิกาลูกตุ้มด้วยระบบมวลติดสปริงเบาซึ่งสั่นขึ้นลงในแนวดิ่ง โดยค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ 200 N/m ถ้าต้องการให้ระบบทั้งสองมีคาบในการเคลื่อนที่เท่ากันจะต้องใช้มวลติดมวลสปริงขนาดเท่าใด?

Answer : 10.2 kg

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.47

ในการทดลองการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายโดยใช้มวล 2.00 kg ติดกับสปริงเบาซึ่งมีค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ 200 N/m และใช้การแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่ายโดยใช้มวล 2.00 kg ติดกับเชือกเบา ถ้าต้องการคาบการแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่ายเป็น 4 เท่าของคาบการสั่นของมวลติดสปริง ความยาวเชือกที่ของลูกตุ้มต้องเป็นเท่าใด?

Answer : 1.57 m

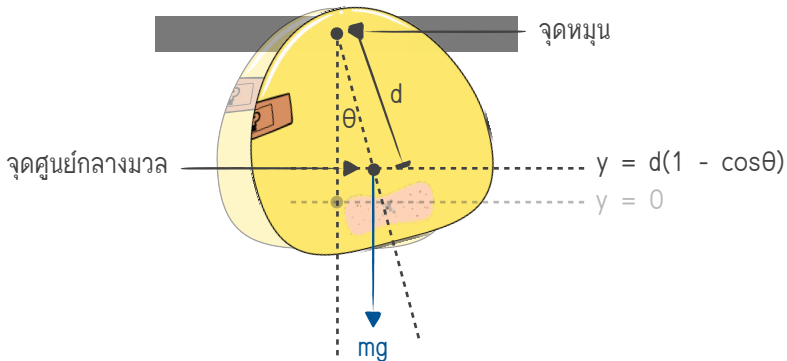
Problem 8.48

ปล่อยลูกตุ้มให้แกว่งแบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายโดยให้เชือกยาว 90 cm แต่เชือกติดกับตะปูที่ระยะ 50 cm ใต้จุดที่แขวนลูกตุ้มในแนวดิ่ง ลูกตุ้มจะใช้เวลาเท่าใดจึงจะกลับมายังจุดเดิมที่ปล่อยลูกตุ้มดังกล่าว?

Answer : 1.59 s

Problem 8.49 Challenge (Physical Pendulum)

วัตถุมวล m โมเมนต์ความเฉื่อย I ระยะห่างจากจุดหมุนถึงจุดศูนย์กลางมวลเท่ากับ d วัตถุถูกดึงออกทำมุม θ_0 กับแนวดิ่ง โดย θ_0 น้อยมากๆ ดังรูปด้านล่าง



- จงแสดงว่าวัตถุนี้จะแกว่งแบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย?
- จงหาความถี่ในการแกว่งของวัตถุ?
- จงหาคาบในการแกว่งของวัตถุ?
- จงหามุมเทียบกับแนวดิ่งที่เวลาใดๆ เมื่อที่ $t = 0$ วัตถุทำมุม θ_0 กับแนวดิ่ง?
- จงหาอัตราเร็วเชิงมุมของวัตถุที่เวลาใดๆ?
- จงหาความเร่งเชิงมุมของวัตถุที่เวลาใดๆ?
- จงหาความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วเชิงมุมกับมุมของวัตถุ?
- จงหาพลังงานของระบบ?

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

$$\text{Answer : a) } \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

$$\text{b) } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgd}{I}}, \text{ c) } T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}, \text{ d) } \theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{mgd}{I}}t\right),$$

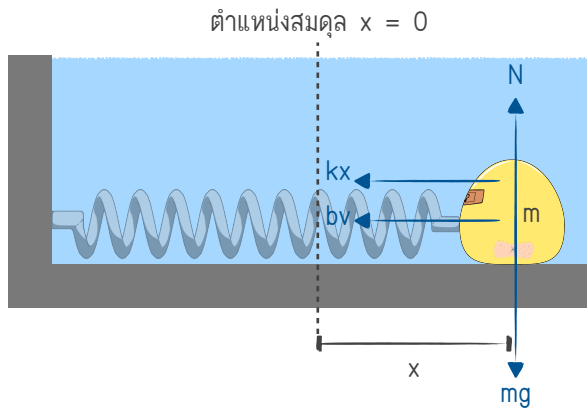
$$\text{e) } \omega = -\sqrt{\frac{mgd}{I}}\theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{mgd}{I}}t\right), \text{ f) } \alpha = -\frac{mgd}{I}\theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{mgd}{I}}t\right),$$

$$\text{g) } \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}(\theta_0^2 - \theta^2)} \quad \text{and} \quad \text{h) } E = \frac{1}{2}mgd\theta_0^2$$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

การสั่นภายใต้ความหน่วง (Damped Oscillations) [Additional]

พิจารณาการเคลื่อนที่ของมวลติดสปริงซึ่งมีปัจจัยของแรงต้านที่แปรผันตามความเร็วเพิ่มเข้ามา ดังรูปด้านล่าง



จาก

$$\Sigma \vec{F}_x = m \vec{a}_x$$

$$-kx - bv = m \vec{a}_x$$

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ และ } \gamma = \frac{b}{2m}$$



การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

ในกรณีนี้ผลเฉลยของสมการจะเป็นไปได้ 3 รูป ดังนี้

กรณี $\gamma < \omega_0$ เรียกว่า Underdamped

จะได้ $x(t) = A(t)\cos(\omega t + \phi)$

เมื่อ $A(t) = Ae^{-\gamma t}$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ และ ϕ คือ เฟสเริ่มต้น

กรณี $\gamma = \omega_0$ เรียกว่า Critically damped

จะได้ $x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$

เมื่อ A และ B คือ ค่าคงที่

กรณี $\gamma > \omega_0$ เรียกว่า Overdamped

จะได้ $x(t) = Ae^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + Be^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$

เมื่อ A และ B คือ ค่าคงที่

สามารถพิสูจน์ได้โดยการนำผลเฉลยของแต่ละกรณี ภายใตเงื่อนไขเฉพาะของแต่ละกรณี แทนกลับเข้าไปในสมการ $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0$ ซึ่งจะได้สมการที่เป็นจริงออกมา (จะแสดงได้ว่าด้านซ้ายกับด้านขวาของสมการเท่ากัน)

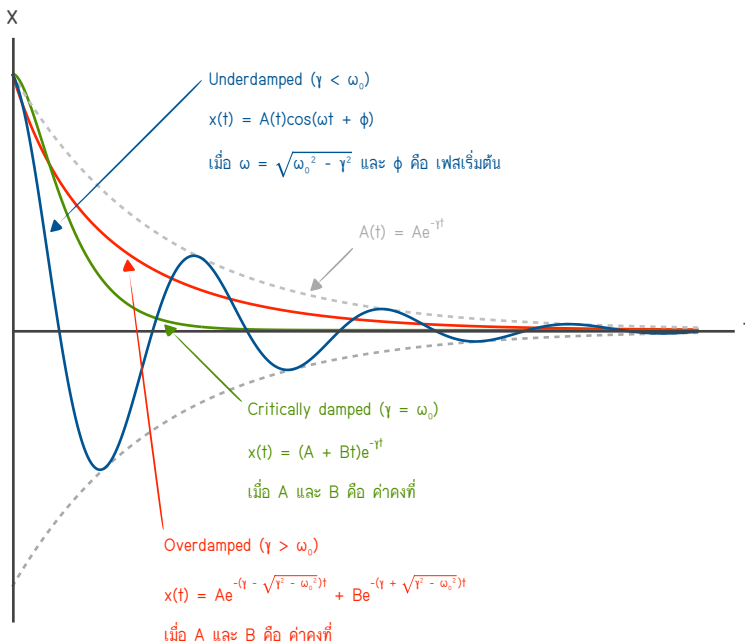


การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)



การสั่นภายใต้ความหน่วง (Damped Oscillations)

เมื่อสมการอยู่ในรูป $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0$ ผลเฉลยเป็นไปได้อีก 3 กรณี ดังนี้



Problem 8.50 Challenge

วัตถุมวล 0.100 kg ติดกับสปริงเบาหลายๆ ซึ่งมีค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ 10.0 N/m ถ้าดึงมวลออกมาทำให้สปริงยืดออกแล้วปล่อย โดยการเคลื่อนที่นี้มีแรงต้านแปรผันตามความเร็ว และค่าคงที่ของการแปรผันเท่ากับ 2.00 kg/s วัตถุจะสั่นในรูปแบบใด?

Answer : Critically damped

Problem 8.51 Challenge

วัตถุมวล 0.250 kg ติดกับสปริงเบาหลายๆ ซึ่งมีค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ 25.0 N/m ถ้าดึงมวลออกมาทำให้สปริงยืดออกเป็นระยะ 20.0 cm แล้วปล่อย โดยการเคลื่อนที่นี้มีแรงต้านแปรผันตามความเร็ว และค่าคงที่ของการแปรผันเท่ากับ 0.300 kg/s จงหา

- วัตถุสั่นในรูปแบบใด?
- ความถี่ในการสั่น?
- คาบในการสั่น?
- ถ้าที่เวลา $t = 0 \text{ s}$ วัตถุมีแอมพลิจูดเท่ากับ 20.0 cm ที่เวลา $t = 5.00 \text{ s}$ วัตถุจะมีแอมพลิจูดเป็นเท่าใด?

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Answer : a) Underdamped, b) 1.59 Hz, c) 0.630 s and 1.00 cm



การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.52 Challenge

วัตถุมวล 0.500 kg ติดกับสปริงเบามาก ซึ่งมีค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ 50.0 N/m ถ้าดึงมวลออกมาทำให้สปริงยืดออก แล้วปล่อย ถ้าการเคลื่อนที่นี้มีแรงต้านที่แปรผันตามความเร็ว โดยค่าคงที่ของการแปรผันดังกล่าว $b = 0.350 \text{ kg/s}$ ถ้าตอนเริ่มต้นวัตถุมีแอมพลิจูดเป็นค่าแอมพลิจูดสูงสุด จะต้องใช้เวลาเท่าใดแอมพลิจูดจึงจะลดลงเหลือครึ่งหนึ่งของแอมพลิจูดสูงสุด?

Answer : 1.98 s

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.53 Challenge

จงแสดงว่า ในกรณี Underdamped ซึ่งมีผลเฉลยของสมการเป็น

$$x = A(t)\cos(\omega t + \phi)$$

เมื่อ $A(t) = Ae^{-\gamma t}$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, ϕ คือ เฟสเริ่มต้น และ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

พลังงานของวัตถุ (E) จะอยู่ในรูปสมการ

$$E = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\gamma t}\left(1 + \left(\frac{\gamma + \omega \tan(\omega t + \phi)}{\omega_0}\right)^2\right)\cos^2(\omega t + \phi)$$

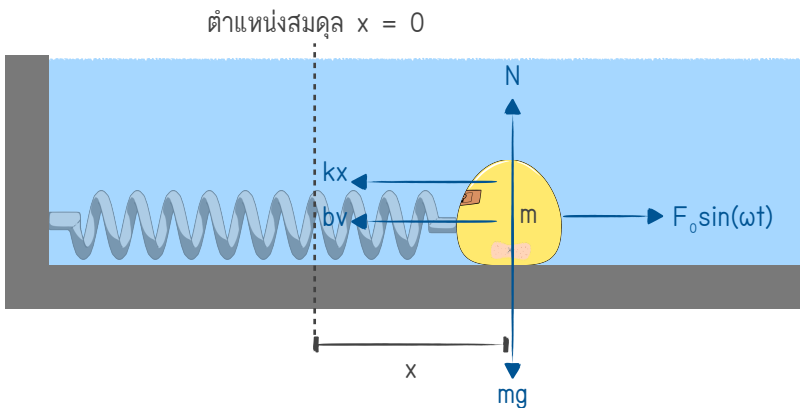
การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)



การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

การสั่นภายใต้แรงกระทำ (Forces Oscillations) [Additional]

พิจารณาการเคลื่อนที่แบบ Damped Oscillations ซึ่งมีแรงเพิ่มเข้ามาตาม
สมการ $F_0 \sin(\omega t)$ ดังรูปด้านล่าง



จาก $\Sigma \vec{F}_x = m \vec{a}_x$

$$F_0 \sin(\omega t) - kx - bv = m \vec{a}_x$$

$$F_0 \sin(\omega t) - kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ และ } \gamma = \frac{b}{2m}$$

ในกรณีนี้ผลเฉลยของสมการ คือ $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

เมื่อ $A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$ และ ϕ คือ เฟสเริ่มต้น

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)



การเคลื่อนที่แบบการสั่นซึ่งมีแรงในรูป $F_0 \sin(\omega t)$ เพิ่มเข้ามา

เมื่อสมการอยู่ในรูป
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

ผลเฉลยของสมการ คือ $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

เมื่อ
$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

และ ϕ คือ เฟสเริ่มต้น

ข้อสังเกต

เมื่อมีแรงมากระทำ วัตถุจะสั่นด้วยแอมพลิจูดสูงสุดเมื่อ $\omega = \omega_0$ เรียกปรากฏการณ์นี้ว่า “การสั่นพ้อง (Resonance)” และเรียกความถี่ของแรงที่มากระทำกับระบบซึ่งตรงกับความถี่ธรรมชาติของระบบว่า “ความถี่เรโซแนนซ์ (Resonance Frequency)”

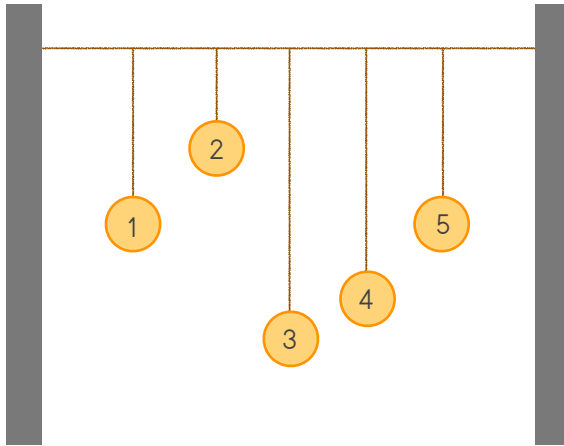
เมื่อลูกตุ้มขนาดใหญ่แกว่งจะทำให้ลูกตุ้มขนาดเล็กแกว่งตาม โดยลูกตุ้มขนาดเล็กที่มีความยาวเชือกใกล้เคียงกับลูกตุ้มใหญ่จะแกว่งกว้างที่สุด



การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.54

ลูกตุ้ม 1, 2, 3, 4 และ 5 แขวนกับเชือกเบาดังรูปด้านล่าง เมื่อผลักลูกตุ้มที่ 1 ให้สั่น ลูกตุ้มใดจะแกว่งตามลูกตุ้มที่ 1 ได้ชัดเจนที่สุด (แอมพลิจูดสูงสุด)?



Answer : ลูกตุ้มที่ 5

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.55 Challenge

วัตถุมวล 0.500 kg ติดกับสปริงเบามาก ซึ่งมีค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ 200 N/m ถ้าให้แรงกระทำกับมวลดังกล่าวตามสมการ $(5.00 \text{ N})\sin(10.0\pi t)$ ถ้าการเคลื่อนที่นี้มีแรงต้านที่แปรผันตามความเร็ว โดยมีค่าคงที่ของการแปรผันเท่ากับ 0.350 kg/s

- วัตถุจะสั่นด้วยความถี่เท่าใด?
- วัตถุจะสั่นด้วยแอมพลิจูดสูงสุดที่ความถี่เท่าใด?

Answer : a) 5.00 Hz and b) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

Problem 8.56 Challenge

จากสมการ $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t)$ ซึ่งมีผลเฉลยของสมการเป็น

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ เมื่อ $\gamma = \frac{b}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ และ ϕ คือ เฟสเริ่มต้น

จงแสดงว่า $A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$?

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)



การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)



Pinfist : มัธยมศึกษาตอนปลาย และอุดมศึกษา