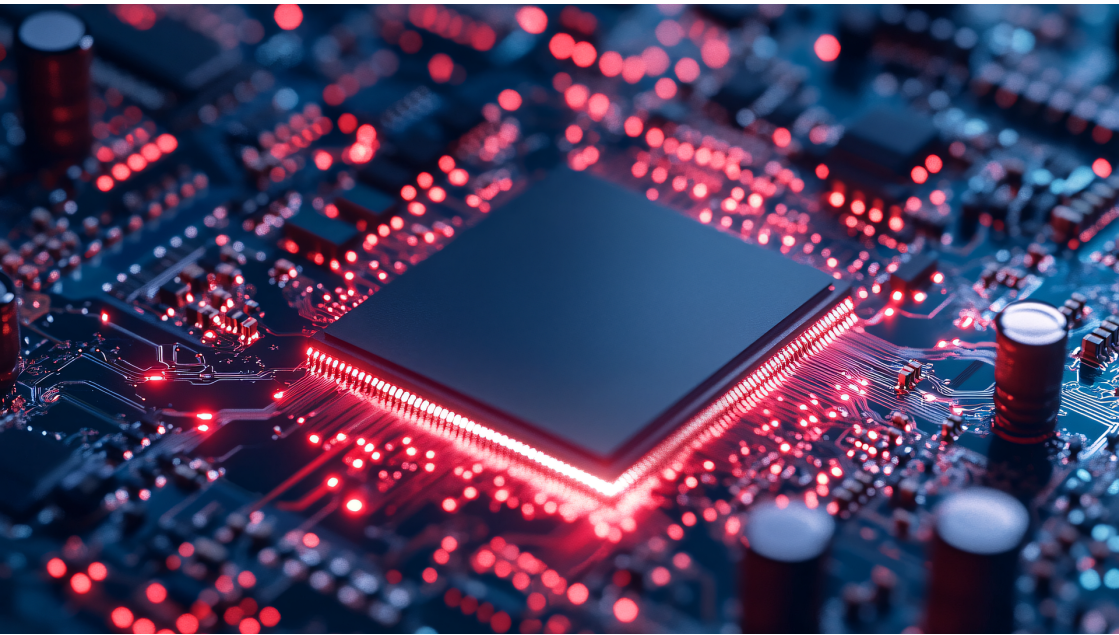




รูปภาพจาก : www.pixabay.com

บทที่ 19 ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์

การอธิบายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติหรือการเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นปัญหาที่วุ่นวายยิ่งขึ้น เมื่อไม่สามารถบอกตำแหน่ง โมเมนตัม พลังงาน เวลา หรือข้อมูลต่างๆ ของอนุภาคได้ชัดเจน ในบทนี้จะอธิบายถึงมุมมองใหม่ๆ จากควอนตัมฟิสิกส์ เพื่อใช้อธิบายพฤติกรรมของอนุภาค และอิเล็กทรอนิกส์ในอะตอมที่มีความไม่แน่นอนของปริมาณทางฟิสิกส์

การแผ่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของวัตถุดำ (Blackbody Radiation)



วัตถุดำ (Blackbody)

วัตถุดำ คือ วัตถุที่ดูดกลืนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าทุกความยาวคลื่นอย่างสมบูรณ์ และเมื่อวัตถุดำมีความร้อนสูงกว่าสิ่งแวดล้อม วัตถุดำจะแผ่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมาทุกความยาวคลื่น

กฎของสเตฟาน (Stefan's Law)

$$\mathcal{P} = \sigma A e T^4$$

$\mathcal{P}$ คือ กำลังในการแผ่รังสี

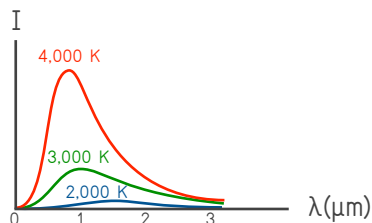
σ คือ Stefan's Constant $\approx 5.6696 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$

A คือ พื้นที่ผิวของวัตถุ

e คือ ความสามารถในการแผ่รังสี (Emissivity) และ สำหรับวัตถุดำ $e = 1$

T คือ อุณหภูมิที่พื้นผิววัตถุในหน่วย K

กฎการกระจัดของวีน (Wien's Displacement Law)



$$\lambda_{\max} T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

$\lambda_{\max}$ คือ ความยาวคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความเข้มมากที่สุดที่แผ่รังสีออกมาจากวัตถุดำ

T คือ อุณหภูมิที่พื้นผิววัตถุในหน่วย K

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

ข้อสังเกต

วัตถุดำไม่จำเป็นต้องมีสีดำ แต่เป็นวัตถุในอุดมคติที่ดูดกลืนและแผ่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าได้อย่างสมบูรณ์

วัตถุที่มีอุณหภูมิสูงจะแผ่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในหลายๆ ช่วงความยาวคลื่นด้วยความเข้มที่แตกต่างกัน โดยวัตถุยิ่งมีอุณหภูมิสูงขึ้น คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่ออกมาด้วยความเข้มมากที่สุดจะมีความยาวคลื่นสั้นลง เช่น วัตถุที่แผ่แสงสีแดงออกมาเข้มสุดจะมีอุณหภูมิต่ำกว่าวัตถุที่แผ่แสงสีน้ำเงินออกมาเข้มสุด เป็นต้น

การอธิบายความเข้มในการแผ่รังสีของวัตถุดำโดยใช้แนวคิดแบบ Classical Theory ตามกฎของเรย์เลย์-จีน (Rayleigh-Jeans Law)

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4}$$

$I(\lambda, T)$ คือ ความเข้มของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่รังสีออกมาจากวัตถุดำ

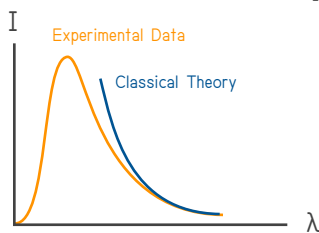
c คือ อัตราเร็วของแสงในสุญญากาศ

k_B คือ Boltzmann's Constant $\approx 1.38 \times 10^{-23}$ J/K

T คือ อุณหภูมิของวัตถุดำในหน่วย K

λ คือ ความยาวคลื่นของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่รังสีออกมาจากวัตถุดำ

แต่กฎของเรย์เลย์-จีน (Rayleigh-Jeans Law) กลับอธิบายการทดลองการแผ่รังสีของวัตถุดำได้ในช่วงที่ความยาวคลื่นมากๆ เท่านั้น ในช่วงความยาวคลื่นสั้นๆ กฎดังกล่าวกลับไม่สอดคล้องกับผลการทดลอง ดังรูปด้านล่าง



ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

ในปี ค.ศ. 1900 มัคส์ พลังค์ (Max Planck) ได้พัฒนาแนวคิดเกี่ยวกับการแผ่รังสีของวัตถุดำ บนพื้นฐานของสมมติฐาน 2 ข้อ (Plank Hypothesized) ดังนี้



สมมติฐานของมัคส์ พลังค์ (Plank Hypothesized)

1) พลังงานของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่รังสีจาก Oscillator มีค่าได้เฉพาะและไม่ต่อเนื่อง ตามสมการ

$$E_n = nhf$$

E_n คือ พลังงานของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่รังสีจาก Oscillator

n คือ จำนวนเต็มบวก เรียกว่า “เลขควอนตัม (Quantum Number)”

h คือ Planck's Constant $\approx 6.626 \times 10^{-34}$ J-s

f คือ ความถี่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่รังสีจาก Oscillator

2) Oscillator จะปล่อยหรือดูดกลืนพลังงานเมื่อเปลี่ยนแปลงจากสถานะควอนตัมหนึ่งไปยังอีกสถานะหนึ่ง ความแตกต่างของพลังงานทั้งหมดระหว่างสถานะเริ่มต้นกับสถานะสุดท้ายนั้นถูกปล่อยหรือดูดกลืนเป็นรังสีควอนตัมเดียว นั่นคือพลังงานดังกล่าวจะเท่ากับ $E = hf$

จากสมมติฐานทั้ง 2 ข้อ Max Planck ได้ใช้แนวคิดเช่นเดียวกับ Rayleigh-Jeans เพื่อให้ได้มาซึ่งความหนาแน่นของพลังงาน โดยขึ้นกับพลังงานเฉลี่ย (ขึ้นกับทอม $k_B T$) แต่พลังงานเฉลี่ยไม่ได้ขึ้นกับทฤษฎีส่วนแบ่งพลังงาน (Equipartition Theorem) พลังงานเฉลี่ยของคลื่นถูกมองว่าเป็นความต่างของพลังงานเฉลี่ยระหว่างระดับพลังงานของ Oscillator ซึ่งความน่าจะเป็นของสถานะพลังงานขึ้นกับ $e^{-\frac{E}{k_B T}}$ นำมาสู่สมการ

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)}$$

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

กำหนดให้ $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$ จะได้

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^x - 1)}$$

จาก $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$ จะได้

$$I(\lambda, T) \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} (1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots - 1)^{-1}$$

$$I(\lambda, T) \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} (x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots)^{-1}$$

ที่ความยาวคลื่นมากๆ ทำให้ x มีค่าน้อยมากๆ ส่งผลให้เทอม x มากกว่าเทอมอื่นๆ เราจึงละเลยเทอมอื่นๆ จะได้

$$I(\lambda, T) \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 x}$$

$$I(\lambda, T) \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left(\frac{hc}{\lambda k_B T} \right)} \quad ; \quad x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$$

$$I(\lambda, T) \approx \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4}$$

เห็นได้ว่าที่ความยาวคลื่นมากๆ สมการความเข้มของ Max Planck สามารถลดรูปมาเป็นสมการ Rayleigh-Jeans Law ได้ ทำให้แนวคิดเรื่องความไม่ต่อเนื่องของพลังงานแบบ Max Planck น่าสนใจยิ่งขึ้น



ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

พิจารณาที่จุดสูงสุดของสมการความเข้มของ Max Planck จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dI(\lambda, T)}{d\lambda} &= 0 \\ \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)} \right) &= 0 \\ \frac{d}{d\lambda} (\lambda^{-5} (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)^{-1}) &= 0 \\ \lambda^{-5} \frac{d}{d\lambda} (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)^{-1} + (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)^{-1} \frac{d}{d\lambda} (\lambda^{-5}) &= 0 \\ -(e^{hc/\lambda k_B T} - 1)^{-2} (-\lambda^{-7} \frac{hc}{k_B T} e^{hc/\lambda k_B T}) + (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)^{-1} (-5\lambda^{-6}) &= 0 \\ (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)^{-1} \left(\frac{hc}{k_B T \lambda} e^{hc/\lambda k_B T} \right) - 5 &= 0\end{aligned}$$

กำหนดให้ $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$ จะได้

$$(e^x - 1)^{-1} (xe^x) - 5 = 0$$

$$xe^x = 5(e^x - 1)$$

จาก $xe^x = 5(e^x - 1)$ มีคำตอบของสมการเป็น $x \approx 4.9511$ จะได้

$$\frac{hc}{\lambda k_B T} \approx 4.9511$$

$$\lambda T \approx \frac{hc}{4.9511 k_B}$$

$$\therefore \lambda_{\max} T \approx 2.898 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$$

เห็นได้ว่าที่ความยาวคลื่นซึ่งมีความเข้มสูงสุด สมการความเข้มของ Max Planck สามารถนำไปสู่กฎการกระจัดของวิน (Wien's Displacement Law) นั้น ทำให้แนวคิดเรื่องความไม่ต่อเนื่องของพลังงานแบบ Max Planck น่าสนใจยิ่งขึ้นอีก

Problem 19.1

แสงเลเซอร์ความยาวคลื่น 630 nm กำลัง 0.6 mW จะมีจำนวนโฟตอนต่อวินาทีที่ถูกปล่อยออกมาเท่าใด?

Answer : 2×10^{15} Photons/s

Problem 19.2

วัตถุทึบแสงภายในกล่องบรรจุแก๊สชนิดหนึ่ง โดยวัตถุดังกล่าวมีช่องเล็กๆ 1 ช่อง พื้นที่ 1 mm^2 เมื่อทำให้แก๊สอุณหภูมิสูงขึ้นจนเกิดแสงความยาวคลื่น 660 nm ปล่อยออกมาทางช่องดังกล่าวด้วยความเข้ม $1 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2$ ภายในช่วงเวลา 1 นาที่ จะมีโฟตอนออกมาจำนวนเท่าใด?

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Answer : 2×10^8 Photons

Problem 19.3

แสงความยาวคลื่น 500 nm ความเข้ม 990 W/m^2 ตกกระทบพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส ยาวด้านละ 1.00 m ในช่วงเวลา 1.00 s จะมีจำนวนโฟตอนตกกระทบพื้นที่ดังกล่าวจำนวนเท่าใด?

Answer : 2.49×10^{21} Photons

Problem 19.4

ยิงแสงความยาวคลื่น 660 nm จำนวน 7.0×10^{22} Photons เข้าใส่น้ำมวล 200 g ถ้าพลังงานจากแสงดังกล่าวได้ 40% กลายเป็นความร้อนของน้ำ น้ำดังกล่าวจะมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นเท่าใด (กำหนดให้ค่าความจุความร้อนของน้ำเท่ากับ $4,200 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$)?

Answer : 10 K

Problem 19.5

จงหาความยาวคลื่นจากการแผ่รังสีซึ่งมีความเข้มมากที่สุด เมื่อสมมติให้วัตถุที่พิจารณาเป็นวัตถุดำ

- ผิวหนังมนุษย์ ซึ่งมีอุณหภูมิ $35.0 \text{ }^{\circ}\text{C}$?
- ดวงอาทิตย์ซึ่งมีอุณหภูมิพื้นผิวประมาณ $5,800 \text{ K}$?

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Answer : a) $9.40 \mu\text{m}$ and b) 500 nm

► Problem 19.6 ◀

มวล 2.00 kg ติดกับสปริงเบาๆ มีค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ 25.0 N/m และสั่นแบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายด้วยแอมพลิจูด 0.400 m ถ้าสมมติให้ระบบดังกล่าว คือ Oscillator ตามสมมติฐานของ Max Planck จงหาเลขควอนตัมของระบบดังกล่าว?

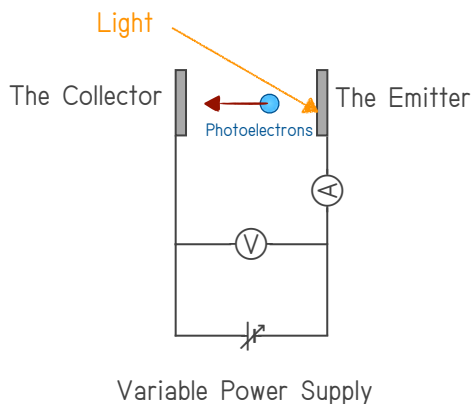
Answer : 5.36×10^{33}

ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก (The Photoelectric Effect)



ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก (The Photoelectric Effect)

ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก คือ ปรากฏการณ์ที่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตกกระทบโลหะแล้วทำให้อิเล็กตรอนหลุดออก โดยอิเล็กตรอนที่หลุดออกมาจากปรากฏการณ์ดังกล่าวเรียกว่า “โฟโตอิเล็กตรอน (Photoelectrons)” โดยแผนภาพวงจรในการทดลองเป็นตามรูปด้านล่าง



จากการทดลองดังกล่าวสามารถหาพลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอนได้ด้วยการเพิ่มความต่างศักย์ไฟฟ้าในทิศทางที่ต้านกระแสไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจากโฟโตอิเล็กตรอน จนกระแสไฟฟ้าในวงจรมีขนาดเป็นศูนย์ ความต่างศักย์ไฟฟ้าที่ทำให้กระแสไฟฟ้าเริ่มเป็นศูนย์ (หยุดการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนได้พอดี) เรียกว่า “ศักย์หยุดยั้ง (Stopping Potential ; ΔV_0)” เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ของโฟโตอิเล็กตรอนจากโลหะแผ่นหนึ่งและไปหยุดที่โลหะอีกแผ่นหนึ่งพอดี จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน จะได้

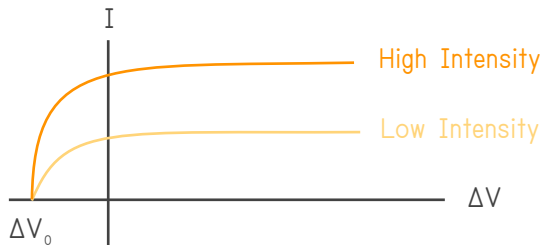
ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$(0 - K_{\max}) + (-e)(-\Delta V_0) = 0$$

$$K_{\max} = e\Delta V_0$$

เมื่อนำผลการทดลองมาวาดกราฟระหว่างกระแสไฟฟ้าในวงจรกับความต่างศักย์ไฟฟ้า ทำให้ไปกับวงจร จะได้กราฟดังรูปด้านล่าง



แนวความคิดดั้งเดิมที่ใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก

1) อิเล็กตรอนดูดกลืนพลังงานได้อย่างต่อเนื่อง เมื่อคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามีความเข้มสูงขึ้น พลังงานจะถูกถ่ายเทเข้าไปในโลหะสูงขึ้น โฟโตอิเล็กตรอนจะออกมาด้วยแนวโน้มพลังงานจลน์ที่สูงขึ้น

แต่ผลการทดลองที่ออกมาได้แสดงให้เห็นว่าพลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอนไม่ได้ขึ้นกับความเข้มของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

2) โฟโตอิเล็กตรอนต้องใช้เวลาในการสะสมพลังงานเพื่อที่จะหลุดออกมาจากแผ่นโลหะ เมื่อคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าความเข้มน้อยกว่า โฟโตอิเล็กตรอนจะต้องใช้เวลาสะสมพลังงานนานกว่า

แต่ผลการทดลองที่ออกมาได้แสดงให้เห็นว่าถึงแม้คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจะมีความเข้มต่ำ ถ้าจะเกิดโฟโตอิเล็กตรอน จะเกิดขึ้นแทบจะทันทีที่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตกกระทบแผ่นโลหะ (น้อยกว่า 10^{-9} s หลังจากทีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตกกระทบแผ่นโลหะ)

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

3) โฟโตอิเล็กตรอนเกิดขึ้นได้โดยไม่ขึ้นกับความถี่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ถ้าคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามีความเข้มสูงมากพอ พลังงานจะถูกถ่ายโอนไปยังโลหะโดยไม่ขึ้นกับความถี่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

แต่ผลการทดลองที่ออกมาได้แสดงให้เห็นว่าจะไม่มีโฟโตอิเล็กตรอนเกิดขึ้นหากความถี่ต่ำกว่าค่าความถี่ขีดเริ่ม (Cutoff Frequency ; f_0) โดยไม่ขึ้นกับความเข้มของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งค่านี้เป็นค่าเฉพาะของแต่ละโลหะ

4) พลังงานจลน์ของโฟโตอิเล็กตรอนจะไม่มีความสัมพันธ์กับความถี่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ตกกระทบโลหะ และพลังงานจลน์ของโฟโตอิเล็กตรอนจะสัมพันธ์กับความเข้มของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

แต่ผลการทดลองแสดงให้เห็นว่าพลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอนแปรผันตามความถี่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ตกกระทบโลหะ

ในปี 1905 ไอน์สไตน์ (Einstein) ได้ตั้งสมมติฐานว่าแสง (คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า) ซึ่งมีความถี่ f สามารถพิจารณาได้ว่าเป็นกระแสของก้อนพลังงาน (Quanta) และเรียกก้อนพลังงานของแสงนี้ว่า “โฟตอน (Photon)” โดยแต่ละโฟตอนเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่ากับ c และมีพลังงานเป็นตามสมการ

$$E = hf$$

E คือ พลังงานของโฟตอน

h คือ Planck's Constant $\approx 6.626 \times 10^{-34}$ J·s

f คือ ความถี่ของโฟตอน

แบบจำลองของไอน์สไตน์สำหรับปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก ได้เสนอว่าโฟตอนจะตกกระทบโลหะด้วยพลังงาน $E = hf$ และถ้าพลังงานมากพอที่จะทำให้อิเล็กตรอนหลุดจากโลหะได้ (ถ้าพลังงานไม่มากพอจะทำให้อิเล็กตรอนหลุดจากโลหะ จะไม่เกิดการถ่ายโอนพลังงานดังกล่าว) โฟตอนจะให้พลังงานทั้งหมดแก่อิเล็กตรอน โดยให้พลังงานดังกล่าวกับอิเล็กตรอนเพียงตัวเดียวในโลหะเท่านั้น (เป็นพฤติกรรมแบบตัว

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

ต่อตัวระหว่างโฟตอนกับอิเล็กตรอน) แนวคิดดังกล่าวทำให้พลังงานของอิเล็กตรอนจะไม่มีค่าต่อเนื่องตามทฤษฎีคลื่นแบบดั้งเดิม

จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน จะได้

$$E_{\text{โฟตอนที่กระทบโลหะ}} = \Delta K_{\text{อิเล็กตรอน}} + \Delta U_{\text{อิเล็กตรอน}}$$

พลังงานศักย์ของอิเล็กตรอนตอนที่อยู่ในโลหะ เรียกว่า “ฟังก์ชันงาน (work function ; ϕ)” จะได้

$$E_{\gamma} = (K_{\text{max}} - 0) + (0 - (-\phi))$$

$$E_{\gamma} = K_{\text{max}} + \phi$$

$\therefore$

$$K_{\text{max}} = E_{\gamma} - \phi$$

$$K_{\text{max}} = hf - \phi \quad ; E_{\gamma} = hf$$

พิจารณาที่ความถี่เริ่มต้น (Cutoff Frequency ; f_0) ซึ่งเริ่มเกิดเกิดโฟโตอิเล็กตรอนพอดี นั่นคือ $K_{\text{max}} = 0$ จะได้

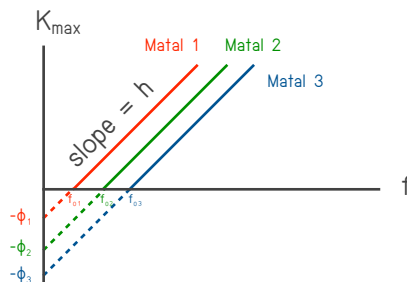
$$0 = hf_0 - \phi$$

$$\phi = hf_0$$

$\therefore$

$$K_{\text{max}} = hf - hf_0$$

จากสมการดังกล่าวทำให้ได้กราฟสอดคล้องกับการทดลอง ดังรูปด้านล่าง



ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

จากแนวคิดดังกล่าวได้เข้ามาอธิบายสิ่งที่แนวคิดแบบดั้งเดิมอธิบายไม่ได้ และยังได้เน้นย้ำแนวคิดเรื่องความไม่ต่อเนื่องของพลังงานแบบ Max Planck อีกด้วย

- 1) พลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอนไม่ได้ขึ้นกับความเข้มของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า
- 2) จากการที่โฟโตตอนถ่ายโอนพลังงานแบบตัวต่อตัวกับอิเล็กตรอน อิเล็กตรอนจึงไม่ต้องการสะสมพลังงาน ทำให้โฟโตอิเล็กตรอนจะเกิดขึ้นทันทีที่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตกกระทบแผ่นโลหะ (น้อยกว่า 10^{-9} s หลังจากคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตกกระทบแผ่นโลหะ)
- 3) จะไม่มีโฟโตอิเล็กตรอนเกิดขึ้นหากความถี่ต่ำกว่าค่าความถี่ขีดเริ่ม (Cutoff Frequency ; f_0) โดยไม่ขึ้นกับความเข้มของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า
- 4) พลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอนแปรผันตามความถี่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ตกกระทบโลหะ

เนื่องจากพลังงานที่ใช้คำนวณในปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริกจะมีขนาดน้อยมากๆ จึงนิยมใช้พลังงานในหน่วย eV โดย $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$ และเพื่อความสะดวก เราจะแปลงพลังงานของสมการ $E = hf$ ซึ่งเป็นหน่วย J ให้อยู่ในหน่วย eV ดังนี้

$$E_{\text{eV}} = E_{\text{J}} \left(\frac{1 \text{ eV}}{1.60 \times 10^{-19} \text{ J}} \right)$$

$$E_{\text{eV}} = (hf) \left(\frac{1 \text{ eV}}{1.60 \times 10^{-19} \text{ J}} \right)$$

$$E_{\text{eV}} = \left(\frac{hc}{\lambda} \right) \left(\frac{1 \text{ eV}}{1.60 \times 10^{-19} \text{ J}} \right)$$

$$E_{\text{eV}} = \left(\frac{hc}{\lambda_{\text{nm}} \times 10^9} \right) \left(\frac{1 \text{ eV}}{1.60 \times 10^{-19} \text{ J}} \right)$$

$$\therefore E = hf \quad \rightarrow \quad E \approx \frac{1,240}{\lambda_{\text{nm}}} \text{ eV}$$

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

ข้อสังเกต

ความถี่ขีดเริ่มของแสงที่ใช้สำหรับทำให้เกิดโฟโตอิเล็กตรอนขึ้นอยู่กับชนิดของโลหะ แต่ไม่ขึ้นกับความเข้มแสง

การเกิดโฟโตอิเล็กตรอนสำหรับโลหะชนิดหนึ่งๆ ไม่ขึ้นกับความเข้มแสง แต่ขึ้นกับความถี่แสง

สำหรับโลหะชนิดหนึ่งๆ พลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอนขึ้นกับความถี่แสง

จำนวนโฟโตอิเล็กตรอนแปรผันตามความเข้มแสง

ความเข้มแสงที่ฉายลงบนโลหะไม่มีผลต่อความต่างศักย์หยุดยั้ง

Problem 19.7

โลหะสามชนิด ซีเซียม (Cs) แบเรียม (Ba) และแคลเซียม (Ca) มีฟังก์ชันงานเป็น 1.8 eV, 2.5 eV และ 3.2 eV ตามลำดับ ถ้ามีแสงความยาวคลื่น 400 nm ตกกระทบโลหะทั้งสาม โลหะชนิดใดจะเกิดโฟโตอิเล็กตรอน?

Answer : ซีเซียม (Cs) และแบเรียม (Ba)

Problem 19.8

ฉายแสงความยาวคลื่น 500 nm ตกกระทบผิวโลหะซึ่งมีฟังก์ชันงานเท่ากับ 4.70 eV อิเล็กตรอนที่หลุดออกมาจะมีพลังงานจลน์ได้มากที่สุดเท่าใด?

Answer : ไม่มีโฟโตอิเล็กตรอนจากความยาวคลื่นดังกล่าว

Problem 19.9

โลหะมีฟังก์ชันงาน 2.0 eV ถูกยิงด้วยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าความยาวคลื่น 100 nm พลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอนจากโลหะนั้นกล่าวเป็นเท่าใด?

Answer : 10.4 eV

Problem 19.10

โลหะมีฟังก์ชันงาน 2.0 eV ถูกยิงด้วยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าความยาวคลื่น 300 nm พลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอนจากโลหะนั้นกล่าวเป็นเท่าใด?

Answer : 2.1 eV

Problem 19.11

ยิงแสงสีโลหะมีฟังก์ชันงาน 1.0 eV ทำให้เกิดโฟโตอิเล็กตรอนมีพลังงานจลน์สูงสุด 2.0 eV ถ้าใช้แสงความถี่ 1.5 เท่าของแสงเดิม พลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอนจากโลหะดังกล่าวเป็นเท่าใด?

Answer : 3.5 eV

Problem 19.12

โลหะที่หนึ่งมีฟังก์ชันงาน 3.3 eV โลหะที่สองมีความถี่ขีดเริ่ม 4.0×10^{14} Hz ยิ่งแสงความยาวคลื่นเดียวกันตกกระทบโลหะทั้งสอง พบโฟโตอิเล็กตรอนจากโลหะที่หนึ่งมีพลังงานจลน์สูงสุด 1.2 eV โฟโตอิเล็กตรอนจากโลหะที่สองจะมีพลังงานจลน์สูงสุดเท่าใด?

Answer : 2.8 eV

Problem 19.13

ฉายแสงความถี่ 5.0×10^{14} Hz ใส่โลหะชนิดหนึ่ง พบว่าอิเล็กตรอนที่หลุดออกมามีพลังงานจลน์สูงสุด 0.8 eV ถ้าฉายแสงความถี่ 10×10^{14} Hz ลงบนโลหะเดิม อิเล็กตรอนที่หลุดออกมามีพลังงานจลน์สูงสุดเท่าใด?

Answer : 2.9 eV

Problem 19.14

ต้องใช้ความต่างศักย์เท่าใดเพื่อหยุดโฟโตอิเล็กตรอนซึ่งมีพลังงานจลน์สูงสุดที่หลุดออกมาจากโลหะซึ่งมีฟังก์ชันงาน 2.5 eV เมื่อถูกฉายด้วยแสงความยาวคลื่น 400 nm?

Answer : 0.6 V

Problem 19.15

ต้องใช้ความต่างศักย์เท่าใดเพื่อหยุดโฟโตอิเล็กตรอนซึ่งมีพลังงานจลน์สูงสุดที่หลุดออกมาจากโลหะซึ่งมีฟังก์ชันงาน 2.3 eV เมื่อถูกฉายด้วยแสงความถี่ 7.0×10^{14} Hz?

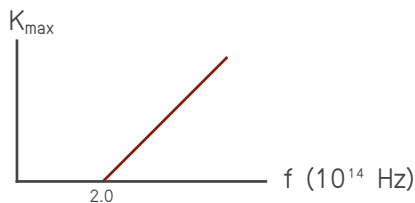
Answer : 0.6 V

Problem 19.16

โฟตอนตัวหนึ่งตกกระทบโลหะซึ่งมีฟังก์ชันงาน 5.6 eV ทำให้เกิดโฟโตอิเล็กตรอนพลังงานจลน์สูงสุด 1.2 eV ถ้าใช้โฟตอนพลังงานเท่ากันตกกระทบโลหะซึ่งมีฟังก์ชันงาน 4.7 eV จะต้องใช้ความต่างศักย์เท่าใดเพื่อหยุดโฟโตอิเล็กตรอนที่หลุดจากผิวโลหะนั้น?

Answer : 2.1 V **Problem 19.17**

กราฟระหว่างพลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอนกับความถี่เป็นไปตามกราฟด้านล่าง ถ้าใช้คลื่นแสงความถี่ $6.0 \times 10^{14} \text{ Hz}$ จะต้องใช้ความต่างศักย์เท่าใดในการหยุดโฟโตอิเล็กตรอนจากโลหะนั้น?



ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Answer : 1.65 V

Problem 19.18

จากปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก ถ้าเปลี่ยนความยาวคลื่นจาก λ_1 เป็น λ_2 ทำให้ศักย์หยุดยังเปลี่ยนจาก V_1 เป็น V_2 ค่าของ $V_2 - V_1$ เป็นเท่าใด?

$$\text{Answer : } \frac{hc(\lambda_1 - \lambda_2)}{e\lambda_1\lambda_2}$$

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Problem 19.19

ฉายแสงความถี่ 8.0×10^{14} Hz ตกกระทบผิวโลหะชนิดหนึ่ง พบว่าความต่างศักย์หยุดยั้งเท่ากับ 1.1 V ความถี่ขีดเริ่มของโลหะนั้นเป็นเท่าใด?

Answer : 5.3×10^{14} Hz

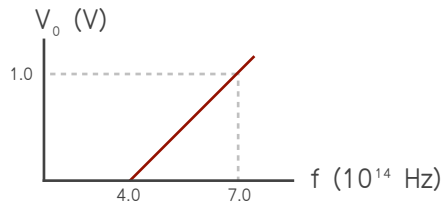
Problem 19.20

โลหะฟังก์ชันงาน 4.80 eV ต้องฉายแสงความยาวคลื่นเท่าใด จึงจะทำให้อิเล็กตรอนหลุดจากขั้วแคโทดสามารถถึงขั้วแอโนดได้พอดี เมื่อศักย์ไฟฟ้าขั้วแอโนดต่ำกว่าขั้วแคโทด 1.80 V?

Answer : 188 nm

Problem 19.21

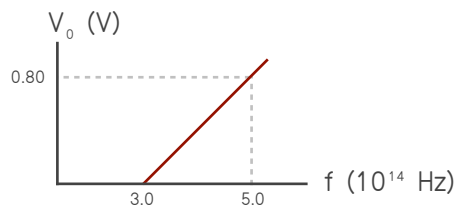
จากกราฟการทดลองโฟโตอิเล็กทริก ดังรูปด้านล่าง ค่าคงที่ของพลังค์เป็นเท่าใด?



Answer : 5.3×10^{-34} J·s

Problem 19.22

จากกราฟการทดลองโฟโตอิเล็กทริก ดังรูปด้านล่าง ค่าคงที่ของพลังค์เป็นเท่าใด?



ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Answer : 6.4×10^{-34} J·s**Problem 19.23**

เมื่อฉายแสงความถี่ 5.48×10^{14} Hz ลงบนโลหะชนิดหนึ่งทำให้อิเล็กตรอนหลุดออกมาด้วยพลังงานจลน์สูงสุด 0.79 eV เมื่อฉายแสงความถี่ 7.39×10^{14} Hz ลงบนโลหะเดิมทำให้อิเล็กตรอนหลุดออกมาด้วยพลังงานจลน์สูงสุด 1.55 eV ค่าคงตัวของพลังค์จากการทดลองดังกล่าวเป็นเท่าใด?

Answer : 6.37×10^{-34} J·s

Problem 19.24

ฉายแสงความยาวคลื่น 625 nm กระทำบนแผ่นโลหะชนิดหนึ่ง พบว่าอิเล็กตรอนหลุดจากผิวโลหะด้วยอัตราเร็วต่างๆ กันจนถึง 4.60×10^5 m/s จงหา

- a) ฟังก์ชันงานของโลหะนั้น
- b) ความถี่ขีดเริ่มของโลหะนั้น

Answer : a) 1.38 eV and b) 3.33×10^{14} Hz

Problem 19.25

ฉายแสงความยาวคลื่น 400 nm กระแทกผิวของแผ่นโลหะสามแผ่นซึ่งมีฟังก์ชันงาน $\phi_1 = 2.30 \text{ eV}$, $\phi_2 = 3.90 \text{ eV}$ และ $\phi_3 = 4.50 \text{ eV}$ จงหา

- โลหะใดบ้างที่เกิดโฟโตอิเล็กตรอน?
- พลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอนที่เกิดขึ้น?
- อัตราเร็วสูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอนที่เกิดขึ้น?

Answer : a) โลหะแผ่นที่ 1, b) 0.80 eV and c) $0.53 \times 10^6 \text{ m/s}$

Problem 19.26

แสงกำลัง 80 W ความยาวคลื่น 500 nm ตกกระทบโลหะซึ่งมีฟังก์ชันงาน 2.0 eV จะทำให้เกิดโฟโตอิเล็กตรอนต่อวินาทีจำนวนเท่าใด?

Answer : 2.0×10^{20} Electrons/s

Problem 19.27

แสงความยาวคลื่น 660 nm ความเข้ม 30 W/m^2 ส่องกระทบผิวโลหะพื้นที่ 10 cm^2 ถ้าแสงดังกล่าวมีความถี่มากกว่าความถี่ขีดเริ่มของโลหะ และโลหะนั้นดูดกลืนพลังงานแสงไป 80% เพื่อทำให้เกิดโฟโตอิเล็กตรอน แสงดังกล่าวจะทำให้เกิดกระแสไฟฟ้าสูงสุดเท่าใด?

Answer : 20 mA

ปรากฏการณ์คอมป์ตัน (The Compton Effect)



ปรากฏการณ์คอมป์ตัน (The Compton Effect)

พิจารณาโมเมนตัมของโฟตอน

$$\begin{aligned}\text{จาก} \quad E^2 &= p^2 c^2 + E_0^2 \\ E^2 &= p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2\end{aligned}$$

เนื่องโฟตอนมีอัตราเร็วเท่ากับ c ดังนั้น m_0 จะต้องเป็นศูนย์ เพื่อที่มวลของโฟตอนจะได้ไม่มีขนาดเป็นอนันต์ จะได้

$$E^2 = p^2 c^2 + ((0)c^2)^2$$

$$\therefore p = \frac{E}{c}$$

p คือ ขนาดโมเมนตัมของโฟตอน

E คือ พลังงานของโฟตอน

c คือ อัตราเร็วของแสงในสุญญากาศ

$$p = \frac{hf}{c} \quad ; E = hf$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad ; c = f\lambda$$

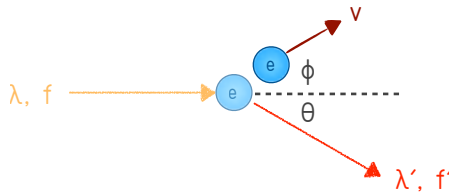
h คือ Planck's Constant $\approx 6.626 \times 10^{-34}$ J·s

λ คือ ความยาวคลื่นของโฟตอน



ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

พิจารณาโฟตอนความยาวคลื่น λ ความถี่ f เคลื่อนที่เข้าชนอิเล็กตรอนซึ่งอยู่นิ่ง หลังการชนโฟตอนได้กระเจิงเป็นมุม θ เทียบกับแนวที่โฟตอนเข้ามาชน โดยความยาวคลื่นได้เปลี่ยนไปเป็น λ' ความถี่เปลี่ยนไปเป็น f' อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ทำมุม ϕ เทียบกับแนวที่โฟตอนเข้ามาชน โดยมีความเร็วขนาด v ดังรูปด้านล่าง



กำหนดให้ขนาดโมเมนตัมของโฟตอนก่อนชน คือ p

ขนาดโมเมนตัมของโฟตอนหลังชน คือ p'

ขนาดโมเมนตัมของอิเล็กตรอนหลังชน คือ p_e

จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม จะได้

$$\Sigma \vec{p}_f = \Sigma \vec{p}_i$$

$$\vec{p}_e + \vec{p}' = \vec{p}$$

$$\vec{p}_e = \vec{p} - \vec{p}'$$

$$\therefore p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta \quad \dots\dots (1)$$

จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน (หลังการชนอิเล็กตรอนมีอัตราเร็วสูง) จะได้

$$\Sigma E_f = \Sigma E_i$$

$$p'c + E = pc + E_0$$

$$E = (p - p')c + E_0$$

$$E^2 = (p^2 + p'^2 - 2pp')c^2 + 2(p - p')cE_0 + E_0^2$$

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

$$\begin{aligned}
 E^2 - E_0^2 &= (p^2 + p'^2 - 2pp')c^2 + 2(p - p')cE_0 \\
 p_e^2 c^2 &= (p^2 + p'^2 - 2pp')c^2 + 2(p - p')cE_0 \\
 p_e^2 &= (p^2 + p'^2 - 2pp') + 2(p - p')\frac{E_0}{c} \\
 p_e^2 &= (p^2 + p'^2 - 2pp') + 2(p - p')\frac{m_0 c^2}{c} \\
 p_e^2 &= p^2 + p'^2 - 2pp' + 2(p - p')m_0 c \quad \dots (2)
 \end{aligned}$$

(1) = (2) จะได้

$$p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta = p^2 + p'^2 - 2pp' + 2(p - p')m_0 c$$

$$(p - p')m_0 c = pp' - pp'\cos\theta$$

$$p - p' = \frac{pp'}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} = \frac{1}{m_0 c} \left(\frac{h}{\lambda}\right) \left(\frac{h}{\lambda'}\right) (1 - \cos\theta)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$$

$$\therefore \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$$

$\Delta\lambda$ คือ ความยาวคลื่นของโฟตอนที่เปลี่ยนไปหลังการชน

h คือ Planck's Constant $\approx 6.626 \times 10^{-34}$ J·s

m_0 คือ มวลนิ่งของอิเล็กตรอน ($\approx 9.11 \times 10^{-31}$ kg)

c คือ อัตราเร็วของแสงในสุญญากาศ

θ คือ มุมกระเจิงของโฟตอนเทียบกับแนวของโฟตอนที่เข้ามาชน

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

จาก $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$

$$\frac{c}{f'} - \frac{c}{f} = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) \quad ; c = f\lambda$$

$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{h}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{f - f'}{ff'} = \frac{h}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta)$$

$$f - f' = \frac{hff'}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta)$$

f คือ ความถี่ของโฟตอนก่อนชน

f' คือ ความถี่ของโฟตอนหลังชน

จาก $f - f' = \frac{hff'}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta)$

$$hf - hf' = \frac{hfhf'}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta)$$

$$E - E' = \frac{EE'}{E_0}(1 - \cos\theta)$$

E คือ พลังงานของโฟตอนก่อนชน

E' คือ พลังงานของโฟตอนหลังชน

E_0 คือ พลังงานมวลนิ่งของอิเล็กตรอน



Problem 19.28

รังสีเอกซ์ตกกระทบบนอิเล็กตรอนซึ่งอยู่นิ่ง เมื่อรังสีเอกซ์กระเจิงพบว่าความยาวคลื่นเปลี่ยนไป 1.213 pm จงหามุมกระเจิงของรังสีเอกซ์ดังกล่าว?

Answer : 60.0°

Problem 19.29

รังสีเอกซ์พลังงาน 300 keV ตกกระทบบนอิเล็กตรอนซึ่งอยู่นิ่งทำให้รังสีเอกซ์กระเจิงทำมุม 37.0° เทียบกับรังสีเอกซ์ตกกระทบบ จงหา

- การเปลี่ยนแปลงของความยาวคลื่น?
- พลังงานของรังสีเอกซ์ที่กระเจิงออกมา?
- พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนหลังจากโดนชน?

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Answer : a) 4.88×10^{-13} m, b) 268 keV and c) 32 keV

Problem 19.30 Challenge

การทดลองการกระเจิงของคอมพ์ตัน
อิเล็กตรอนอิสระซึ่งอยู่นิ่งในขณะเริ่มต้น
2,180 km/s จงหา

โฟตอนกระเจิงทำมุม 17.4° จาก
หลังกระเจิงอิเล็กตรอนมีความเร็วขนาด

- พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนหลังกระเจิง?
- ความยาวคลื่นที่เปลี่ยนไปหลังกระเจิง?
- ความยาวคลื่นของโฟตอนที่ตกกระทบ?
- มุมกระเจิงของอิเล็กตรอน?

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Answer : a) 2.16×10^{-18} J, b) 1.11×10^{-13} m, c) 1.01×10^{-10} m
and d) 80.6°

Problem 19.31 Challenge

พิจารณาโฟตอนความยาวคลื่น λ เข้าชนอิเล็กตรอนซึ่งกำลังเคลื่อนที่หนีโฟตอนดังกล่าวด้วยอัตราเร็ว u ถ้าโฟตอนเข้าชนในแนวเดียวกับที่อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ ทำให้โฟตอนกระเจิงทำมุม θ เทียบกับแนวที่เข้าชนอิเล็กตรอน จงแสดงว่าความยาวคลื่นของโฟตอนหลังการกระเจิงจะเป็นไปตามสมการ

$$\lambda' = \lambda \left(\frac{1 - \frac{u \cos \theta}{c}}{1 - \frac{u}{c}} \right) + \frac{h}{m_0 c} \sqrt{\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}} (1 - \cos \theta)$$

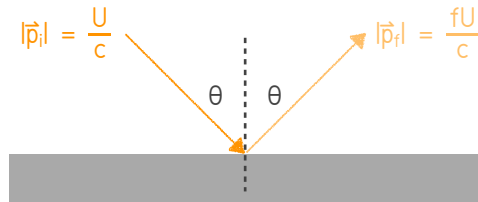
เมื่อ m_0 คือ มวลนิ่งของอิเล็กตรอน, h คือ h คือ Planck's Constant และ c คือ อัตราเร็วของแสงในสุญญากาศ?

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)



ความดันรังสี (Radiation Pressure) [Additional]

พิจารณาโฟตอนพลังงาน U เข้าชนวัตถุด้วยมุมกระทบ θ เข้าใส่วัตถุซึ่งมีสัมประสิทธิ์การสะท้อน (Coefficient of Reflection) f ทำให้โฟตอนสะท้อนออกมาด้วยมุม θ ตามกฎการสะท้อน โดยมีพลังงานเปลี่ยนไปเป็น fU ดังรูปด้านล่าง



พิจารณาการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมที่เกิดขึ้นกับโฟตอน จะได้

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$\Delta \vec{p} = \left(\frac{fU}{c} \sin \theta \hat{i} + \frac{fU}{c} \cos \theta \hat{j} \right) - \left(\frac{U}{c} \sin \theta \hat{i} - \frac{U}{c} \cos \theta \hat{j} \right)$$

$$\Delta \vec{p} = \frac{U}{c} (f - 1) \sin \theta \hat{i} + \frac{U}{c} (f + 1) \cos \theta \hat{j}$$

$$|\Delta \vec{p}_\perp| = \frac{U}{c} (f + 1) \cos \theta$$

$$|\Delta \vec{p}_\perp| = \frac{\mathcal{E}}{c} (f + 1) \cos \theta \quad ; \quad \mathcal{E} = \frac{U}{t}$$

$$\frac{|\Delta \vec{p}_\perp|}{t} = \frac{IA \cos \theta}{c} (f + 1) \cos \theta \quad ; \quad I = \frac{\mathcal{E}}{A_\perp}$$

$$|\vec{F}_\perp| = \frac{IA}{c} (f + 1) \cos^2 \theta$$

$$\frac{|\vec{F}_\perp|}{A} = \frac{I}{c} (f + 1) \cos^2 \theta$$

$$P = \frac{I}{c} (f + 1) \cos^2 \theta$$



ความดันรังสีที่เกิดขึ้นกับโฟตอน

$$P = \frac{I}{c}(f + 1)\cos^2\theta$$

P คือ ความดันรังสีที่เกิดขึ้นกับโฟตอน

f คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนของวัตถุที่โฟตอนเข้าชน (Coefficient of Reflection)

θ คือ มุมตกกระทบของโฟตอน (หรือ มุมสะท้อนของโฟตอน)

I คือ ความเข้มของโฟตอน

c คือ อัตราเร็วของแสงในสุญญากาศ

เมื่อ $\theta = 0^\circ$ หรือ โฟตอนตกกระทบตั้งฉากกับผิววัตถุ จะได้

$$P = \frac{(f + 1)I}{c}$$



Problem 19.32

ลำเลเซอร์กำลังเฉลี่ย 3.0 mW เส้นผ่านศูนย์กลาง 2.0 mm ถ้ายิ่งลำเลเซอร์ดังกล่าวตกกระทบตั้งฉากกับผิววัตถุซึ่งสะท้อนแสงได้ 70% จงหาความดันรังสีที่เกิดขึ้นกับวัตถุดังกล่าว?

Answer : 5.4 μPa

Problem 19.33 Challenge

จงหาขนาดแรงเฉลี่ยที่เกิดขึ้นกับวัตถุพื้นที่ 5.0 cm^2 สะท้อนแสงได้ 50% โดยโพตอนมีสมการสนามไฟฟ้า คือ $E = (3.0 \times 10^5 \text{ V/m}) \cos(kx - (12 \times 10^6 \text{ Hz})t)$?

Answer : 0.298 mN

Problem 19.34

ความเข้มแสงดวงอาทิตย์ที่ผิวโลกมีค่าประมาณ $1,370 \text{ W/m}^2$ ถ้าสมมติว่าดูดกลืนแสงที่ตกกระทบได้ทั้งหมด จงหาขนาดแรงเฉลี่ยที่แสงอาทิตย์กระทำต่อโลก และเปรียบเทียบแรงดังกล่าวกับแรงดึงดูดระหว่างมวลที่ดวงอาทิตย์กระทำต่อโลก เมื่อโลกมีรัศมีประมาณ $6.37 \times 10^6 \text{ m}$, โลกมีมวลประมาณ $5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$, ดวงอาทิตย์มีมวลประมาณ $1.991 \times 10^{30} \text{ kg}$ และระยะห่างระหว่างโลกกับดวงอาทิตย์ประมาณ $1.496 \times 10^{11} \text{ m}$?

Answer : 0.582 GN

and แรงดันรังสีจากดวงอาทิตย์น้อยกว่าแรงดึงดูดระหว่างมวลจากดวงอาทิตย์มากๆ

Problem 19.35 Challenge

ลำเลเซอร์ความยาวคลื่น 650 nm กำลังเฉลี่ย 15.0 mW เส้นผ่านศูนย์กลาง 2.00 mm จงหา

- a) ขนาดสนามไฟฟ้าสูงสุดของลำเลเซอร์ดังกล่าว?
- b) พลังงานของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากลำเลเซอร์ดังกล่าวในช่วงความยาว 1.00 m?
- c) โมเมนตัมของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากลำเลเซอร์ดังกล่าวจากข้อ b)?

Answer : a) 1.90 kN/C, b) 50.0 pJ and c) 1.67×10^{-19} kg·m/s

Problem 19.36

จงหาความเข้มของลำเลเซอร์ที่ใช้ในการดันวัตถุทรงกลมสีดำ มวล m ความหนาแน่น ρ ให้ลอยนิ่งอยู่ในสนามโน้มถ่วง g ?

$$\text{Answer : } gc\left(\frac{4\rho\sqrt{m}}{3\sqrt{\pi}}\right)^{2/3}$$

Problem 19.37 Challenge

วัตถุครึ่งทรงกลมตันมวล m รัศมี r ด้านผิวโค้งสะท้อนแสง 40% และด้านผิววงกลม (ด้านตรงข้ามผิวโค้ง) สะท้อนแสง 60% เดิมอยู่นิ่ง ได้มีการยิงแสงความเข้ม I ซึ่งเป็นแสงขนานเข้าไปวัตถุทางด้านผิววงกลม

- จงหาขนาดความเร่งของวัตถุ?
- ผิวโค้งจะต้องแผ่รังสีออกมาด้วยความเข้มเท่าใด จึงทำให้วัตถุนี้อยู่นิ่งดังเดิม?
- ถ้าผิวโค้งไม่มีการแผ่รังสีออกมา จะต้องยิงแสงขนานความเข้มเท่าใด เข้าไปทางด้านผิวโค้งวัตถุนี้อยู่นิ่งดังเดิม?

$$\text{Answer : a) } \frac{1.6I\pi r^2}{mc}, \text{ b) } 0.8I \text{ and c) } \frac{8I}{7}$$

Problem 19.38 Challenge

ยานอวกาศทรงกรวยแหลม ใช้ความดันจากแสงของดวงอาทิตย์เป็นแรงขับเคลื่อนโดยมีมุมที่ยอดกรวยเป็น θ โดยแกนของทรงกรวยชี้เข้าหาดวงอาทิตย์พอดี ถ้ายานอวกาศหันด้านแหลมเข้าหาดวงอาทิตย์ และผิวยานอวกาศถูกทาดำด้วยสีดำ เมื่อนักบินอวกาศต้องการเพิ่มความเร่งของยานอวกาศจึงได้ทำการหาวัสดุที่สะท้อนแสงได้ดีมากมายมาหุ้มผิวยานอวกาศ ผลที่ได้ที่น่าผิดหวัง เนื่องจากความเร่งของยานอวกาศลดลง 50% จงหาว่ามุม θ เป็นเท่าใด?

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Answer : 60°

ความยาวคลื่นเดอบรอยล์ (The de Broglie Wavelength)



ความยาวคลื่นเดอบรอยล์ (The de Broglie Wavelength)

ในปี ค.ศ 1923 Louis de Broglie ได้เสนอสมมติฐานว่าเนื่องจากโฟตอนมีลักษณะเป็นทั้งคลื่นและอนุภาค ดังนั้นสสารทุกอย่างในจักรวาลนี้น่าจะมีลักษณะเป็นทั้งคลื่นและอนุภาคเช่นกัน ซึ่งอธิบายความยาวคลื่นของสสารด้วยสมการ The de Broglie Wavelength ดังนี้

$$p = \frac{h}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$$

h คือ Planck's Constant $\approx 6.626 \times 10^{-34}$ J·s

λ คือ ความยาวคลื่นของสสาร

p คือ ขนาดโมเมนตัมของสสาร

อีกสามปีหลังจากที่ Louis de Broglie ได้เสนอสมมติฐานดังกล่าว C. J. Davisson และ L. H. Germer ได้ทำการทดลองเกี่ยวกับการกระเจิงของอิเล็กตรอนพลังงานต่ำซึ่งบังเอิญเกิดผลึกและอิเล็กตรอนได้เลี้ยวเบนผ่านผลึกดังกล่าว จึงเป็นการยืนยันสมมติฐานดังกล่าวของ Louis de Broglie

Problem 19.39

จงหาความยาวคลื่นของวัตถุมวล 60 kg ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 11 m/s?

Answer : 1.0×10^{-36} m

Problem 19.40

อิเล็กตรอนความยาวคลื่น 0.10 nm มีพลังงานจลน์เท่าใด?

Answer : 2.4×10^{-17} J

Problem 19.41

อนุภาคมวล m มีพลังงานจลน์เพิ่มขึ้นเป็น 4 เท่าจากพลังงานจลน์เดิม ความยาวคลื่นจะเพิ่มขึ้นเป็นกี่เท่าจากเดิม?

Answer : $\frac{1}{2}$

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Problem 19.42

อนุภาคสองอนุภาคมีพลังงานจลน์เท่ากัน แต่อนุภาคตัวแรกมีมวลเป็นครึ่งหนึ่งของอนุภาคตัวที่สอง ความยาวคลื่นของอนุภาคตัวแรกจะเป็นกี่เท่าของอนุภาคตัวที่สอง?

Answer : $\sqrt{2}$

Problem 19.43

อิเล็กตรอนต้องมีอัตราเร็วเท่าใด จึงจะมีโมเมนตัมเป็นหนึ่งในสิบของโมเมนตัมของโฟตอนซึ่งมีความถี่ 4.5×10^{14} Hz?

Answer : 110 m/s

Problem 19.44

อิเล็กตรอนถูกเร่งจากหยุดนิ่งด้วยความต่างศักย์ ΔV พบว่าความยาวคลื่นของอิเล็กตรอนเป็น λ ถ้าต้องการให้ความยาวคลื่นดังกล่าวลดลงเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่นเดิม ความต่างศักย์ที่ให้เร่งอิเล็กตรอนจะต้องเป็นกี่เท่าของค่าเดิม?

Answer : 4

Problem 19.45

ยิงโฟตอนในทิศ $+x$ เข้าชนอนุภาคมวล 2.0×10^{-26} kg ซึ่งอยู่นิ่ง พบว่าโฟตอนวิ่งกลับมาในทิศ $-x$ ด้วยโมเมนตัมขนาดเท่าเดิม และอนุภาคดังกล่าววิ่งออกไปในทิศ $+x$ ด้วยความเร็วขนาด 300 m/s ความยาวคลื่นของโฟตอนที่เข้ามาชนอนุภาคเป็นเท่าใด?

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Answer : 0.22 nm

Problem 19.46

ลำแสงเลเซอร์ความยาวคลื่น 660 nm ตกกระทบบนพื้นผิวที่สามารถดูดกลืนแสงได้อย่างสมบูรณ์ ถ้าจำนวนโฟตอนที่ตกกระทบบนพื้นผิวดังกล่าวเท่ากับ 1.0×10^{20} Photons/s แรงที่ลำแสงเลเซอร์กระทำกับพื้นผิวดังกล่าวมีขนาดเท่าใด?

Answer : 0.10 MN

อนุภาคควอนตัม (The Quantum Particle)

การมองว่าสสารในจักรวาลเป็นทั้งคลื่นและอนุภาคนั้นขัดกับมุมมองทางฟิสิกส์แบบดั้งเดิม (Classical Physics) อย่างมาก คือ อนุภาคในอุดมคตินั้นมีขนาดจำกัดแต่คลื่นในอุดมคติมีความยาวได้ไม่จำกัด แล้วสมบัติที่ต่างกันอย่างนี้นั้นจะมารวมเป็นสิ่งเดียวกันได้อย่างไร?

พิจารณาคลื่น $y_1 = A\cos(k_1x - \omega_1t)$ และ $y_2 = A\cos(k_2x - \omega_2t)$ มาซ้อนทับกัน (Superposition) จะได้

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = A\cos(k_1x - \omega_1t) + A\cos(k_2x - \omega_2t)$$

$$y = 2A\cos\left(\frac{k_1x - \omega_1t - k_2x + \omega_2t}{2}\right)\cos\left(\frac{k_1x - \omega_1t + k_2x - \omega_2t}{2}\right)$$

$$y = 2A\cos\left(\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right)\cos\left(\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right)$$

$$\text{กำหนดให้ } \Delta k = k_1 - k_2, \Delta \omega = \omega_1 - \omega_2, k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$\text{และ } \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \text{ จะได้}$$

$$y = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right)\cos(kx - \omega t)$$

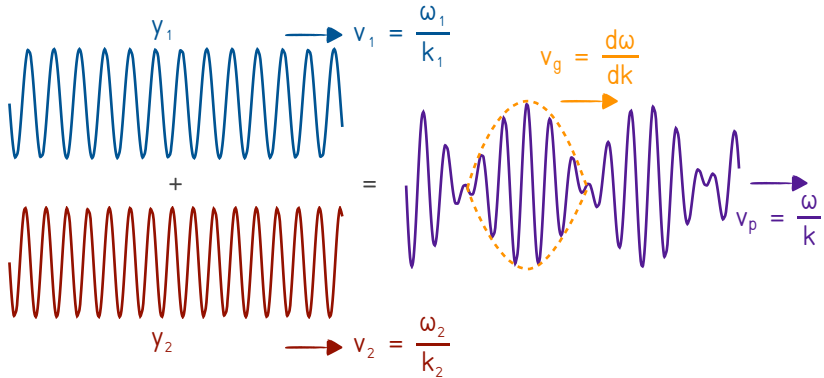
จากสมการดังกล่าว เห็นได้ว่ามีรูปแบบของฟังก์ชันคลื่น 2 ฟังก์ชันซ้อนกันอยู่ คือ เทอม $\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right)$ และ $\cos(kx - \omega t)$ โดยเทอมแรกนั้นเป็นคลื่นซึ่งมีอัตราเร็วเป็น $\frac{\Delta \omega}{\Delta k}$ และเทอมที่สองเป็นคลื่นซึ่งมีอัตราเร็ว $\frac{\omega}{k}$ เนื่องจากเทอม $\Delta \omega < \omega$ ดังนั้นเทอมแรกจึงทำหน้าที่เป็นแอมพลิจูดให้กับเทอมหลัง

$$\text{จึงกำหนดให้อัตราเร็วเฟส (Phase Speed) คือ } v_p = \frac{\omega}{k}$$

$$\text{และอัตราเร็วกลุ่ม (Group Speed) คือ } v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

เพื่อให้เข้าใจถึงอัตราเร็วเฟส (Phase Speed) และอัตราเร็วกลุ่ม (Group Speed) มากขึ้น ให้พิจารณาตามรูปด้านล่าง



จาก

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$$v_g = \frac{h d\omega}{h dk}$$

$$v_g = \frac{h d(2\pi f)}{h d(\frac{2\pi}{\lambda})}$$

$$v_g = \frac{d(hf)}{d(\frac{h}{\lambda})}$$

$$v_g = \frac{dE}{dp}$$

เมื่อเราพิจารณาพลังงานของอนุภาคอิสระตามรูปแบบของฟิสิกส์แบบดั้งเดิม (Classical Physics) นั่นคือ $E = K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ จะได้

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{p}{m} = \frac{mv}{m} = v$$

เห็นได้ว่าอัตราเร็วกลุ่ม (Group Speed) สอดคล้องกับอัตราเร็วของอนุภาค

Problem 19.47 Challenge

แสดงว่าอัตราเร็วของอนุภาคในเชิงสัมพัทธภาพสอดคล้องกับอัตราเร็วกลุ่ม (Group Speed) ในทางควอนตัมฟิสิกส์?

Answer : v

Problem 19.48

นิวตรอนเคลื่อนที่ด้วยความเร็วขนาด 0.400 m/s ผ่านช่องแคบคู่ซึ่งจุดกึ่งกลางของช่องแคบทั้งสองอยู่ห่างกันเป็นระยะ 1.00 mm และนิวตรอนไปตกยังเครื่องตรวจจับซึ่งอยู่ห่างจากช่องแคบคู่เป็นระยะ 10.0 m จงหาว่าตำแหน่งแรกที่มีความเข้มของนิวตรอนน้อยที่สุดอยู่ห่างจากจุดที่ความเข้มของนิวตรอนสูงที่สุดเป็นระยะเท่าใด?

Answer : 4.96 mm

แบบจำลองไฮโดรเจนอะตอมของนีลส์ บอห์ร (Bohr's Model of the Hydrogen Atom)

เมื่อทำให้แก๊สมีความดันต่ำภายใต้สนามไฟฟ้า จะส่งผลให้แก๊สปล่อยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมาในบางเส้นสเปกตรัม (Spectrum) เรียกวิธีการดังกล่าวว่า “Emission Spectroscopy”

เมื่อให้แสงสีขาวผ่านแก๊สซึ่งนำมาวิเคราะห์ จะพบว่ามีส่วนเส้นสเปกตรัมที่ดูดกลืนไป เรียกวิธีการดังกล่าวว่า “Absorption Spectroscopy”



Emission Line Spectra for Hydrogen



Absorption Line Spectra for Hydrogen

ในปี ค.ศ. 1885 Johann Jacob Balmer ได้อธิบายความยาวคลื่นของเส้นสเปกตรัมทั้งสี่เส้นของแก๊สไฮโดรเจนจาก Emission Spectroscopy ตามสมการ

Balmer Series
$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad ; n = 3, 4, 5, \dots$$

λ คือ ความยาวคลื่นของเส้นสเปกตรัมไฮโดรเจนจาก Emission Spectroscopy

R_H คือ Rydberg Constant $\approx 1.0973732 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

หลังจากนั้นได้มีการพบสมการในรูปแบบอนุกรมในการอธิบายความยาวคลื่นของเส้นสเปกตรัมไฮโดรเจนจาก Emission Spectroscopy อื่นๆ อีก เช่น

Lyman Series	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	; $n = 2, 3, 4, \dots$
Paschen Series	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	; $n = 4, 5, 6, \dots$
Brackett Series	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	; $n = 5, 6, 7, \dots$
Pfund Series	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	; $n = 6, 7, 8, \dots$

การค้นพบดังกล่าวไม่ได้มีพื้นฐานทางทฤษฎีมาอธิบายสมการเหล่านี้ แต่ได้ทิ้งประเด็นน่าสนใจที่ว่าเพราะเหตุใดทุกๆ สมการจึงสัมพันธ์กับ Rydberg Constant (R_H)

ในปี ค.ศ. 1803 John Dalton ได้เสนอว่าสารทุกชนิดประกอบด้วยสิ่งเล็กสุดไม่สามารถแบ่งแยกต่อได้อีก และไม่สามารถสร้างใหม่หรือทำลายได้ เรียกว่า “อะตอม (Atom)” โดยอะตอมของธาตุเดียวกันจะมีสมบัติเหมือนกันและมีสมบัติต่างจากธาตุอื่นๆ และธาตุเหล่านี้สามารถรวมกันเป็นสารประกอบได้

ในปี ค.ศ. 1897 J.J. Thomson ได้พบอิเล็กตรอนส่วนประจุต่อมวลของอิเล็กตรอน ในปีต่อมาเขาได้เสนอแบบจำลองอะตอมว่ามีความเป็นกลางทางไฟฟ้าเป็นบริเวณที่มีประจุบวกกระจายอยู่ และมีอิเล็กตรอนฝังอยู่ทั่วๆ เหมือนนมลีดแดงโมในเนื้อแดงโม

ในปี ค.ศ. 1911 Ernest Rutherford และลูกศิษย์ของเขา Hans Geiger และ Ernest Marsden ได้ทำการทดลองซึ่งแสดงว่าแบบจำลองอะตอมของ J.J. Thomson นั้นไม่ถูกต้อง และได้พัฒนาแบบจำลองอะตอมแบบใหม่

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

โดยสันนิษฐานว่าประจุบวกจะกระจุกตัวอยู่ในบริเวณขนาดเล็กเมื่อเทียบกับขนาดของอะตอมโดยเรียกบริเวณนี้ว่า “นิวเคลียส (Nucleus)” และมีอิเล็กตรอนโคจรรอบๆ นิวเคลียสในลักษณะเดียวกับดาวเคราะห์โคจรรอบดวงอาทิตย์

แบบจำลองอะตอมของ Ernest Rutherford ไม่สามารถอธิบายสเปกตรัมของแก๊สไฮโดรเจนจาก Emission Spectroscopy และตามทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของ Maxwell เมื่อประจุมีความเร่งควรเกิดการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมา ดังนั้น อิเล็กตรอนที่โคจรรอบนิวเคลียสควรมีการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมา ทำให้พลังงานของระบบลดลงเรื่อยๆ ทำให้อิเล็กตรอนเคลื่อนเข้าใกล้นิวเคลียสมากขึ้นเรื่อยๆ โมเมนตัมเชิงมุมจะเพิ่มขึ้นและมีแผ่รังสีออกมาด้วยความถี่สูงขึ้น สุดท้ายอิเล็กตรอนจะพุ่งเข้าชนนิวเคลียส และนั่นคือการทำลายตัวเองของอะตอม



แบบจำลองไฮโดรเจนอะตอมของนีลส์ บอห์ร (Bohr's Model of the Hydrogen Atom)

ในปี ค.ศ. 1913 Niels Bohr ได้เสนอแบบจำลองอะตอมแบบใหม่ (ในปัจจุบันแบบจำลองอะตอมของนีลส์ บอห์ร ได้ถูกแทนที่ด้วยทฤษฎีกลศาสตร์ควอนตัม) โดยได้รวมแนวคิดทางควอนตัมของ Planck, แนวคิดโฟตอนของ Einstein, แบบจำลองอะตอมของ Rutherford และกลศาสตร์แบบนิวตัน โดยมีสมมติฐาน 4 ข้อ ดังนี้

1) อิเล็กตรอนเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบนิวเคลียสภายใต้แรงคูลอมบ์

$$\text{จาก} \quad \Sigma \vec{F}_r = m\vec{a}$$

$$\frac{k(e)(e)}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

$$v^2 = \frac{ke^2}{mr} \quad \dots\dots (1)$$

2) อิเล็กตรอนที่อยู่ในวงโคจรที่เสถียรจะไม่ปล่อยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมา (ถึงแม้จะมีความเร่ง) ดังนั้นพลังงานรวมของอิเล็กตรอนจะคงที่ และใช้กลศาสตร์แบบดั้งเดิม (Classical Mechanics) อธิบายได้ (ไม่ได้ใช้กลศาสตร์เชิงสัมพัทธภาพ)

จาก

$$E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k(e)(-e)}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{ke^2}{mr}\right) - \frac{ke^2}{r} \quad ; (1)$$

$$E = - \frac{ke^2}{2r} \quad \dots\dots (2)$$

3) อะตอมจะแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมาเมื่ออิเล็กตรอนเปลี่ยนสถานะจากระดับพลังงานสูงกว่ามายังสถานะที่ระดับพลังงานต่ำกว่า (อะตอมดูดกลืนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าทำให้อิเล็กตรอนเปลี่ยนสถานะจากระดับพลังงานต่ำกว่ามายังสถานะที่ระดับพลังงานสูงกว่า) ตามสมการ

$$E_y = \Delta E_e$$

เมื่อพิจารณากรณีอะตอมแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมา

จะได้

$$-hf = E_f - E_i$$

$$-\frac{hc}{\lambda} = E_f - E_i$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{hc}(E_i - E_f) \quad \dots\dots (3)$$



ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

4) โมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอนในวงโคจรที่เสถียรจะต้องเป็นจำนวนเท่าของ $\hbar$ (ขนาดเส้นรอบวงโคจรจะเป็นจำนวนเท่าของความยาวคลื่นของอิเล็กตรอน)

จาก

$$2\pi r = n\lambda$$

$$2\pi r = n\left(\frac{h}{p}\right)$$

$$pr = n\frac{h}{2\pi} \quad \rightarrow L = n\hbar$$

$$mvr = n\hbar$$

$$v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2} \quad \dots\dots (4)$$

(1) = (4) จะได้

$$\frac{ke^2}{mr} = \frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2}$$

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mke^2}$$

$$r_n = a_0 n^2 \quad ; n = 1, 2, 3, \dots \quad \dots\dots (5)$$

a_0 คือ Bohr Radius = $\frac{\hbar^2}{mke^2} \approx 0.0529 \text{ nm}$

(5) แทนใน (2) จะได้

$$E_n = -\frac{ke^2}{2}\left(\frac{mke^2}{n^2\hbar^2}\right)$$

$$E_n = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2n^2} \quad \dots\dots (6)$$

$$E_n \approx -\frac{13.606}{n^2} \text{ eV} \quad \dots\dots (7)$$



ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

(6) แทนใน (3) จะได้

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{hc} \left(-\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2n_i^2} - \left(-\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2n_f^2} \right) \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{mk^2e^4}{2\hbar^2hc} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2m\pi^2k^2e^4}{h^3c} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

R_H คือ Rydberg Constant = $\frac{2m\pi^2k^2e^4}{h^3c} \approx 1.0973732 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

พิจารณาที่ n_f ค่าต่างๆ

$n_f = 1$ จะได้ Lyman Series $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$; $n = 2, 3, 4, \dots$

$n_f = 2$ จะได้ Balmer Series $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$; $n = 3, 4, 5, \dots$

$n_f = 3$ จะได้ Paschen Series $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$; $n = 4, 5, 6, \dots$

$n_f = 4$ จะได้ Brackett Series $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$; $n = 5, 6, 7, \dots$

$n_f = 5$ จะได้ Pfund Series $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right)$; $n = 6, 7, 8, \dots$

ข้อสังเกต

สเปกตรัมจากหลอดบรรจุแก๊สเป็นสเปกตรัมแบบเส้น แต่สเปกตรัมหลอดไฟฟ้าทั่วไปเป็นสเปกตรัมต่อเนื่อง

ตามทฤษฎีอะตอมของโบร์ รัศมีวงโคจรของอิเล็กตรอนรอบนิวเคลียสสามารถมีค่าได้เฉพาะบางค่าเท่านั้น

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

อิเล็กตรอนในอะตอมสามารถเปลี่ยนระดับพลังงานโดยการดูดกลืนหรือปล่อยพลังงานคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าได้เฉพาะบางค่าเท่านั้น

ทฤษฎีอะตอมของโบร์ไม่สามารถอธิบายอะตอมที่มีหลายอิเล็กตรอน

พลังงานรวมของอิเล็กตรอนในอะตอมมีค่าติดลบมาก แสดงว่าอิเล็กตรอนถูกอะตอมยึดไว้ด้วยพลังงานมาก

Problem 19.49

อนุภาคแอลฟามวล 6.4×10^{-27} kg มีประจุ $+2e$ เริ่มต้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 2.0×10^7 m/s วิ่งตรงเข้าหานิวเคลียสของทองคำซึ่งมีประจุ $+79e$ อนุภาคแอลฟา ดังกล่าวจะเข้าใกล้นิวเคลียสทองคำได้มากที่สุดเท่าใด?

Answer : 2.8×10^{-14} m



Problem 19.50

ตามสมมติฐานของบอร์ ถ้าโปรตอนเคลื่อนที่จากระยะอนันต์ด้วยความเร็วต้นขนาด u พุ่งเข้าหานิวเคลียสของอะตอมเป็นแนวเส้นตรง เมื่อนิวเคลียสของอะตอมดังกล่าว ถูกตั้งให้อยู่กับที่และมีเลขอะตอมน้อยๆ เท่ากับ Z โปรตอนดังกล่าวจะเข้าใกล้ นิวเคลียสได้มากที่สุดเท่าใด?

$$\text{Answer : } \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 m_p u^2}$$

Problem 19.51

อิเล็กตรอนซึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบโปรตอนจะมีพลังงานจลน์เป็นกี่เท่าพลังงานศักย์?

$$\text{Answer : } -\frac{1}{2}$$

Problem 19.52

ในแบบจำลองอะตอมไฮโดรเจนของนีลส์ บอห์ร์ รัศมีวงโคจรของอิเล็กตรอนในสถานะ $n = 4$ เป็นกี่เท่าของสถานะ $n = 1$?

Answer : 16

Problem 19.53

ในแบบจำลองอะตอมไฮโดรเจนของนีลส์ บอห์ร์ อิเล็กตรอนที่โคจรรอบนิวเคลียสด้วยรัศมี 0.0529 nm จะมีความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางขนาดเท่าใด?

Answer : $9.03 \times 10^{22} \text{ m/s}^2$

Problem 19.54

สเปกตรัมเส้นสว่างของไฮโดรเจนอะตอมเส้นแรกมีความยาวคลื่นมากที่สุด เท่ากับ 656 nm ในอนุกรมบัลเมอร์ (Balmer Series) เส้นสว่างลำดับที่สองจะมีความยาวคลื่นเท่าใด?

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Answer : 486 nm

Problem 19.55

ผ่านแสงความถี่หนึ่งจากอนุกรมบัลเมอร์ (Balmer Series) ไปตกกระทบบนกระจกตั้งฉากกับ
 สลิตคู่ พบว่าผลต่างระยะห่างระหว่างระยะทางจากสลิตทั้งสองไปยังแถบสว่างลำดับที่ 2
 เท่ากับ $1.2 \text{ } \mu\text{m}$ เลขควอนตัมของวงโคจรของอิเล็กตรอนระดับพลังงานสูงเป็น
 เท่าใด?

Answer : 3

Problem 19.56

อิเล็กตรอนในไฮโดรเจนอะตอมเปลี่ยนสถานะจากชั้นที่ 3 ลงมายังชั้นที่ 2 จะปลดปล่อยโฟตอนพลังงานเท่าใด?

Answer : -1.8897 eV

Problem 19.57

อิเล็กตรอนในไฮโดรเจนอะตอมอยู่ในสถานะกระตุ้นที่ 3 เมื่อคายพลังงานลงมายู่ในสถานะพื้น จะปล่อยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าความยาวคลื่นเท่าใดออกมา?

Answer : 97.2 nm

Problem 19.58

แก๊สไฮโดรเจนที่มีพลังงานเฉลี่ยของโมเลกุลเท่ากับพลังงานไอออไนซ์ของไฮโดรเจนอะตอม จะมีอุณหภูมิเท่าใด?

Answer : 105,000 K

Problem 19.59

อิเล็กตรอนในไฮโดรเจนอะตอมเปลี่ยนสถานะจากชั้นที่ 2 ลงมายังชั้นที่ 1 จะปลดปล่อยโฟตอนโมเมนตัมเท่าใด?

Answer : $5.453 \times 10^{-27} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$

Problem 19.60

อิเล็กตรอนในไฮโดรเจนอะตอมเปลี่ยนสถานะจากชั้นที่ 4 ลงมายังชั้นที่ 2 จะปลดปล่อยโฟตอนความยาวคลื่นเป็นกี่เท่าของกรณีที่อิเล็กตรอนในไฮโดรเจนอะตอมเปลี่ยนสถานะจากชั้นที่ 2 ลงมายังชั้นที่ 1?

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Answer : 4.001

Problem 19.61

ระดับพลังงานของอิเล็กตรอนในอะตอมชนิดหนึ่ง คือ

ระดับพลังงานที่ 1 มีพลังงาน -20 eV

ระดับพลังงานที่ 2 มีพลังงาน -11 eV

ระดับพลังงานที่ 3 มีพลังงาน -4 eV

ความยาวคลื่นของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ทำให้อิเล็กตรอนในสถานะพื้นของอะตอมดังกล่าวแตกตัวเป็นไอออนเป็นเท่าใด?

Answer : 62 nm

Problem 19.62

แสงความยาวคลื่น 440 nm จากหลอดปรอท มาจากสองระดับพลังงานที่มีพลังงานต่างกันเท่าใด?

Answer : 2.82 eV

Problem 19.63

อิเล็กตรอนในอะตอมนีออนเปลี่ยนสถานะจากระดับ 5s ซึ่งมีพลังงาน 20.66 eV มายังสถานะ 3d พร้อมกับปล่อยโฟตอนความยาวคลื่น 632.8 nm พลังงานของอิเล็กตรอนในอะตอมของนีออนที่สถานะ 3d เป็นเท่าใด?

Answer : 18.70 eV

Problem 19.64

อิเล็กตรอนในไฮโดรเจนอะตอมเปลี่ยนระดับพลังงานจากสถานะกระตุ้นที่ 2 ลงสู่สถานะพื้นทำให้คายโฟตอนพลังงาน 19.34×10^{-19} J ออกมา และเมื่อเปลี่ยนระดับพลังงานจากสถานะกระตุ้นที่ 1 ลงสู่สถานะพื้นทำให้คายโฟตอนพลังงาน 16.33×10^{-19} J ออกมา ถ้าต้องการกระตุ้นให้อิเล็กตรอนในไฮโดรเจนอะตอมเปลี่ยนจากสถานะกระตุ้นที่ 1 ขึ้นไปยังสถานะกระตุ้นที่ 2 ต้องใช้แสงความถี่เท่าใด?

Answer : 4.54×10^{14} Hz

Problem 19.65

อิเล็กตรอนในอะตอมหนึ่งเปลี่ยนระดับพลังงานจากสถานะกระตุ้นที่ 2 ลงสู่สถานะพื้นทำให้คายโฟตอนความยาวคลื่น 200 nm ออกมา และเมื่อเปลี่ยนระดับพลังงานจากสถานะกระตุ้นที่ 2 ลงสู่สถานะกระตุ้นที่ 1 ทำให้คายโฟตอนความยาวคลื่น 300 nm ออกมา ถ้าอิเล็กตรอนเปลี่ยนระดับพลังงานจากสถานะกระตุ้นที่ 1 ลงสู่สถานะพื้น จะคายโฟตอนความยาวคลื่นเท่าใดออกมา?

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Answer : 600 nm

Problem 19.66

การผลิตรังสีเอกซ์ต่อเนื่องความยาวคลื่นต่ำสุด 8.00×10^{-11} m ต้องใช้ความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างขั้วทั้งสองของหลอดรังสีเอกซ์เท่าใด?

Answer : 15.5 kV

Problem 19.67

ถ้าอิเล็กตรอนถูกชนจนมีพลังงาน เท่ากับ -1.1×10^{-14} J จะเกิดรังสีเอกซ์ความยาวคลื่น 2.0×10^{-11} m ออกมา รังสีเอกซ์ดังกล่าวเกิดจากอิเล็กตรอนในระดับที่มีพลังงานเท่าใด?

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Answer : $-1 \times 10^{-15} \text{ J}$

Problem 19.68

อัตราส่วนความยาวคลื่นต่ำสุดของรังสีเอกซ์ที่เกิดจากการเร่งโปรตอนต่ออิเล็กตรอน ด้วยความต่างศักย์ 4.00 kV เท่ากัน เข้าชนเป้าหมายเดียวกัน เป็นเท่าใด?

Answer : 1

Problem 19.69

อะตอมชนิดหนึ่งมีอิเล็กตรอนโคจรเป็นวงกลมรอบนิวเคลียส 1 ตัว พลังงานของอะตอม ณ สถานะหนึ่ง เท่ากับ -10.4 eV ค่าพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของอิเล็กตรอนดังกล่าวเป็นเท่าใด?

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Answer : $K = 10.4 \text{ eV}$ and $U = -20.8 \text{ eV}$

Problem 19.70

มีวอนอะตอมเป็นอะตอมที่มีโปรตอนเป็นศูนย์กลาง และมีอนุภาคมิวออนมีประจุเท่ากับอิเล็กตรอน และมีมวลเป็น 206 เท่าของอิเล็กตรอน วนรอบโปรตอน ถ้ามีวอนวนรอบโปรตอนเป็นวงกลม รัศมีของมีวอนอะตอมต่อไฮโดรเจนอะตอมที่สถานะพื้นเป็นเท่าใด?

Answer : $\frac{1}{206}$

Problem 19.71

จากสมมติฐานของบอร์ จงแสดงว่าสำหรับอะตอมซึ่งมีเลขอะตอมเท่ากับ Z พลังงานของอิเล็กตรอนในระดับชั้นพลังงาน n จะเป็นไปตามสมการ $E_n \approx - \frac{13.6Z^2}{n^2} \text{ eV}$?

Problem 19.72

โฟตอนพลังงาน 2.28 eV ถูกดูดกลืนโดยไฮโดรเจนอะตอม จงหา

- a) ระดับพลังงานน้อยที่สุดที่สามารถถูกทำให้เป็นไอออนได้ด้วยโฟตอนดังกล่าว?
- b) อัตราเร็วของอิเล็กตรอนที่หลุดออกมาตามข้อ a)?

Answer : a) 3 and b) 5.20×10^5 m/s

กลศาสตร์ควอนตัม (Quantum Mechanics) [Additional]

พิจารณาแนวคิดที่ว่าถ้าระบบมีจำนวนอนุภาคมาก เราจะมีความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคมากขึ้นไปด้วย นั่นคือความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคจะแปรผันตามจำนวนอนุภาค

$$\text{Probability} \propto N$$

$$\frac{\text{Probability}}{V} \propto \frac{N}{V}$$

$$\text{Probability Density} \propto \frac{N}{V}$$

เพื่อให้เข้าใจถึงความเป็นคลื่นของอนุภาคมากขึ้น จะยกตัวอย่างกรณีของโฟตอน เนื่องจากความเข้มของโฟตอนจะแปรผันตามจำนวนโฟตอนต่อปริมาตร จะได้

$$\text{Probability Density} \propto I$$

$$\text{Probability Density} \propto E_{\max}^2$$

เห็นได้ว่าความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาค (Probability Density) จะแปรผันตามแอมพลิจูดของคลื่นซึ่งเป็นตัวแทนของอนุภาค เราจะเรียกแอมพลิจูดของคลื่นนี้ว่า “Probability Amplitude” หรือเรียกอีกอย่างว่า “ฟังก์ชันคลื่น (Wave Function)” และจะใช้สัญลักษณ์เป็น Ψ

มีความเป็นไปได้ว่า Ψ จะเป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น Ψ อาจจะได้ไม่ได้ให้ความหมายอะไรในทางฟิสิกส์ แต่ $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ ซึ่งจะเป็นจำนวนจริง ดังนั้น Probability Density จะเป็นจำนวนจริงเช่นกัน จึงสรุปได้ว่า

$$\text{Probability Density} \propto |\Psi|^2$$

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

เมื่อพิจารณาว่า Probability Density คือ ความน่าจะเป็นต่อหน่วยปริมาตรของอนุภาค ณ ตำแหน่งใดๆ ในปริมาตร ถ้ากำหนดให้ความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาค (Probability) ใช้สัญลักษณ์เป็น P และพิจารณาส่วนปริมาตรเล็กๆ dV รอบๆ จุด (x, y, z) จะได้

$$\frac{\frac{P(x,y,z)dV}{V}}{\frac{1}{V}} = |\Psi|^2 dV$$

$$P(x,y,z)dV = |\Psi|^2 dV$$

การตีความในมุมมองของความน่าจะเป็นของฟังก์ชันคลื่นดังกล่าวได้ถูกเสนอขึ้นครั้งแรกในปี ค.ศ. 1928 โดย Max Born

เมื่อพิจารณาความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคในกรณี 1 มิติในช่วง dx รอบๆ จุด x จะได้

$$P(x)dx = |\Psi|^2 dx$$

เมื่อพิจารณาความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคในช่วง $a \leq x \leq b$ จะได้

$$P = \int_a^b |\Psi|^2 dx$$

เมื่อความน่าจะเป็นมีค่าสูงสุด คือ 1 ดังนั้น Normalization Condition คือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 1$$

ค่ากลางหนึ่งที่นิยมนำมาพิจารณาในทางควอนตัมฟิสิกส์ คือ ค่าคาดหวัง (Expectation Value) ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักโดยใช้ Probability Density มาเป็นตัวถ่วงน้ำหนัก จะได้

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* f(x) \Psi dx$$



ฟังก์ชันคลื่น (Wave Function)

Normalization Condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 1$$

 Ψ คือ ฟังก์ชันคลื่น (Wave Function) หรือ Probability Amplitudeความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคในช่วง $a \leq x \leq b$

$$P = \int_a^b |\Psi|^2 dx$$

P คือ ความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคในช่วง $a \leq x \leq b$ ค่าคาดหวังของ $f(x)$ (Expectation Value ; $\langle f(x) \rangle$)

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* f(x) \Psi dx$$

 $\langle f(x) \rangle$ คือ ค่าคาดหวังของ $f(x)$

ข้อสังเกต

พฤติกรรมของอิเล็กตรอนในระดับอะตอมนั้นไม่สามารถระบุตำแหน่งได้อย่างชัดเจน และมีพฤติกรรมเป็นคลื่นได้ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีควอนตัม

อิเล็กตรอนนอกจากเป็นอนุภาค ยังแสดงสมบัติเป็นคลื่นได้ด้วย แต่ไม่สามารถแสดงสมบัติความเป็นคลื่นและอนุภาคพร้อมกัน



Problem 19.73 Challenge

ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคควอนตัม คือ

$$\psi = \begin{cases} A \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) & ; -\frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{4} \\ 0 & ; \text{Other } x \end{cases}$$

- จงหาค่า A?
- จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคในช่วง $x = 0$ ถึง $x = \frac{L}{8}$?
- จงหาค่าคาดหวังของตำแหน่ง x ?

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Answer : a) $\frac{2}{\sqrt{L}}$, b) 0.41 and c) 0

Problem 19.74 Challenge

ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคซึ่งเป็นตามสมการ $\Psi = Ae^{i\omega t} e^{-k|x|}$ เมื่อ ω และ k คือค่าคงที่ จงหาค่า A ?

Answer : $\sqrt{k}$

Problem 19.75 Challenge

ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของอนุภาคควอนตัม คือ

$$\Psi = \begin{cases} Ax & ; 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ Bx + C & ; \frac{L}{2} \leq x \leq L \\ 0 & ; \text{Other } x \end{cases}$$

- จงหาค่า A, B และ C?
- จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคในช่วง $x = \frac{L}{4}$ ถึง $x = \frac{3L}{4}$?
- จงหาค่าคาดหวังของตำแหน่งของฟังก์ชันคลื่นดังกล่าว?

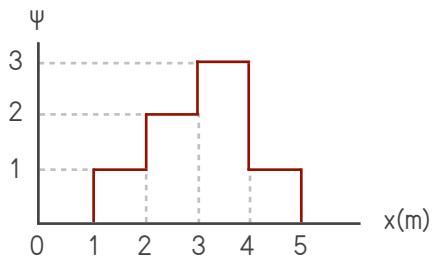
ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Answer : a) $A = \pm \sqrt{\frac{12}{L^3}}$, $B = \mp \sqrt{\frac{12}{L^3}}$ และ $C = \pm \sqrt{\frac{12}{L}}$,
 b) $\frac{7}{8}$ and c) $\frac{L}{2}$

Problem 19.76 Challenge

ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคเป็นไปตามกราฟ ดังรูปด้านล่าง จงหาโอกาสจะพบอนุภาค ในช่วง 3 m - 5 m?



Answer : $\frac{2}{3}$

หลักความไม่แน่นอน (The Uncertainty Principle)

$$\text{จาก} \quad |\vec{A}||\vec{B}| \geq |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$|\vec{A}||\vec{B}| \geq |\vec{A} \cdot \vec{B}|$$

$$\therefore |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 \geq |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2$$

พิจารณาสวนแบ่งเบนมมาตรฐาน จะได้ $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$

$$\sigma_1 \sigma_2 = \sqrt{(\langle x_1^2 \rangle - \langle x_1 \rangle^2)(\langle x_2^2 \rangle - \langle x_2 \rangle^2)}$$

$$\sigma_1^2 \sigma_2^2 = (\langle x_1^2 \rangle - \langle x_1 \rangle^2)(\langle x_2^2 \rangle - \langle x_2 \rangle^2)$$

เมื่อพิจารณากรณีเลื่อนแกนให้ $\langle x \rangle = 0$ จะได้

$$\sigma_1^2 \sigma_2^2 = \langle x_1^2 \rangle \langle x_2^2 \rangle$$

$$\sigma_1^2 \sigma_2^2 \geq |\langle x_1^2 \rangle \cdot \langle x_2^2 \rangle|^2$$

$$\sigma_1^2 \sigma_2^2 \geq |(\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_1 \Psi dx) \cdot (\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_2 \Psi dx)|^2$$

$$\sigma_1^2 \sigma_2^2 \geq |(\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 \Psi dx)|^2$$

$$\text{กำหนดให้ } f(x) = \hat{x}_1 \Psi \quad \rightarrow f(x)^* = \Psi^* \hat{x}_1$$

$$\text{และ } g(x) = \hat{x}_2 \Psi \quad \rightarrow g(x)^* = \Psi^* \hat{x}_2 \quad \text{จะได้}$$

$$\sigma_1^2 \sigma_2^2 \geq |(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* \cdot g(x) dx)|^2$$



ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

พิจารณาจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ จะได้

$$z - z^* = (a + bi) - (a - bi)$$

$$z - z^* = 2bi$$

$$\frac{z - z^*}{2i} = b$$

$$\left| \frac{z - z^*}{2i} \right| = |b|$$

$$\left| \frac{z - z^*}{2i} \right| \leq |z|$$

$$|z|^2 \geq \left| \frac{z - z^*}{2i} \right|^2$$

จะได้ $\sigma_1^2 \sigma_2^2 \geq \left| \frac{1}{2i} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* \cdot g(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^* \cdot f(x) dx \right) \right|^2$

$$\sigma_1 \sigma_2 \geq \left| \frac{1}{2i} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (f(x)^* \cdot g(x) - g(x)^* \cdot f(x)) dx \right) \right|$$

$$\Delta x_1 \Delta x_2 \geq \left| \frac{1}{2i} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (f(x)^* \cdot g(x) - g(x)^* \cdot f(x)) dx \right) \right|$$

ทางควอนตัมฟิสิกส์นั้น $\hat{x} = x$ และ $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

ให้ $\hat{x}_1 = \hat{x}$ และ $\hat{x}_2 = \hat{p}_x$ จะได้

$$f(x)^* \cdot g(x) - g(x)^* \cdot f(x) = -i\hbar x \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\hbar \psi^* \frac{\partial x \psi}{\partial x}$$

$$f(x)^* \cdot g(x) - g(x)^* \cdot f(x) = i\hbar \psi^* \left(\frac{\partial x \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

$$f(x)^* \cdot g(x) - g(x)^* \cdot f(x) = i\hbar \psi^* (\psi)$$

$$f(x)^* \cdot g(x) - g(x)^* \cdot f(x) = i\hbar |\psi|^2$$

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

$$\begin{aligned}\therefore \Delta x \Delta p_x &\geq \left| \frac{1}{2i} \left(\int_{-\infty}^{\infty} i\hbar |\Psi|^2 dx \right) \right| \\ \Delta x \Delta p_x &\geq \left| \frac{\hbar}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx \right) \right| \\ \Delta x \Delta p_x &\geq \frac{\hbar}{2} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 1\end{aligned}$$

$$\text{และ } \hat{t} = t \text{ และ } \hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

ให้ $\hat{x}_1 = \hat{H}$ และ $\hat{x}_2 = \hat{t}$ จะได้

$$f(x) \cdot g(x) - g(x) \cdot f(x) = i\hbar \Psi^* \frac{\partial t \Psi}{\partial t} - i\hbar t \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$f(x) \cdot g(x) - g(x) \cdot f(x) = i\hbar \Psi^* \left(\frac{\partial t \Psi}{\partial t} - t \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)$$

$$f(x) \cdot g(x) - g(x) \cdot f(x) = i\hbar \Psi^* (\Psi)$$

$$f(x) \cdot g(x) - g(x) \cdot f(x) = i\hbar |\Psi|^2$$

$$\begin{aligned}\therefore \Delta E \Delta t &\geq \left| \frac{1}{2i} \left(\int_{-\infty}^{\infty} i\hbar |\Psi|^2 dx \right) \right| \\ \Delta E \Delta t &\geq \left| \frac{\hbar}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx \right) \right| \\ \Delta E \Delta t &\geq \frac{\hbar}{2} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 1\end{aligned}$$





หลักความไม่แน่นอน (The Uncertainty Principle)

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Δx คือ ความไม่แน่นอนในการวัดตำแหน่งตามแนวแกน x

Δp_x คือ ความไม่แน่นอนในการวัดโมเมนตัมตามแนวแกน x

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$; h คือ Planck's Constant $\approx 6.626 \times 10^{-34}$ J·s

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

ΔE คือ ความไม่แน่นอนในการวัดพลังงาน

Δt คือ ความไม่แน่นอนในการวัดเวลา

Problem 19.77

อนุภาคมวล 100 g เคลื่อนที่เป็นแนวเส้นตรงด้วยความเร็วขนาด 100 m/s ถ้าความไม่แน่นอนในการวัดความเร็ว เท่ากับ 0.020 m/s ความไม่แน่นอนในการวัดตำแหน่งเป็นเท่าใด?

Answer : 2.6×10^{-32} m

Problem 19.78

อิเล็กตรอนความเร็วขนาด 300 m/s วัดความเร็วได้ละเอียดถึง 0.010% จะสามารถวัดตำแหน่งของอิเล็กตรอนได้ถูกต้องในระดับเท่าใด?

Answer : 1.93 mm

Problem 19.79

จงหาความคลาดเคลื่อนน้อยสุดของพลังงานอิเล็กตรอนที่อยู่ในระดับเวลา 10^{-8} s?

Answer : 5×10^{-27} J

Problem 19.80 Challenge

อนุภาคโพซิตรอนซึ่งไม่เสถียร มีพลังงานมวลนิ่งประมาณ 135 MeV และมีช่วงชีวิตก่อนจะสลายตัวประมาณ 8.70×10^{-17} s จงหาค่า $\frac{\Delta m}{m_0}$ น้อยสุดที่เป็นไปได้?

Answer : 2.81×10^{-8}

Problem 19.81 Challenge

นิวเคลียสมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางประมาณ 2.0×10^{-15} m จงใช้หลักความไม่แน่นอนแสดงว่าถ้าอิเล็กตรอนอยู่ในนิวเคลียสจะมีการเคลื่อนที่เชิงสัมพัทธภาพ แต่ถ้าโปรตอนถูกกักในนิวเคลียสจะไม่จำเป็นต้องพิจารณาเชิงสัมพัทธภาพ?

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

Problem 19.82 Challenge

ลูกกระสุนปืนมวล 1.00 g เคลื่อนที่ผ่านลำกล้องเส้นผ่านศูนย์กลาง 2.00 mm ด้วยความเร็วขนาด 100 m/s ผู้สังเกตจะต้องอยู่ห่างจากปืนกระบอกนี้เป็นระยะเท่าใด จึงจะสังเกตเห็นกระสุนปืนเคลื่อนที่ออกจากแนวเดิมเป็นระยะ 1.00 cm?

Answer : 3.79×10^{28} m

สมการชเรอดิงเงอร์ (The Schrödinger Equation) [Additional]



สมการชเรอดิงเงอร์ (The Schrödinger Equation)

ในปี ค.ศ. 1926 Erwin Schrödinger ได้พัฒนาสมการเพื่อให้อธิบายพฤติกรรมของอนุภาคในเชิงควอนตัม ดังนี้

Time-Independent Schrödinger Equation

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r})$$

Ψ คือ ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาค (Wave Function) หรือ Probability Amplitude

E คือ พลังงานรวมของอนุภาค

$\hat{H}$ คือ Hamiltonian Operator (Energy Operator) โดยที่

$$\hat{H} = \hat{K} + \hat{U}$$

$\hat{K}$ คือ Kinetic Energy Operator ($\hat{K} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$)

$\hat{U}$ คือ Potential Energy Operator ($\hat{U} = U(\vec{r})$)

$\hat{p}$ คือ Momentum Operator ($\hat{p} = -i\hbar\nabla$)

$$\text{จะได้ } \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) = \frac{1}{2m}(\hat{p} \cdot \hat{p}) + U(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r})$$

ในกรณี 1 มิติ (Time-Independent Schrödinger Equation) จะได้

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)\right)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

Time-Dependent Schrödinger Equation

$$\hat{H}\Psi(\vec{r},t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r},t)$$

Problem 19.83 Challenge

อนุภาคควอนตัมมีพลังงานรวมเป็นศูนย์และมีฟังก์ชันคลื่นเป็น $\Psi(x) = Axe^{-\alpha x^2}$ โดยที่ α เป็นค่าคงที่ จงหาพลังงานศักย์ของระบบดังกล่าวในรูปของตัวแปร x ?

$$\text{Answer : } \frac{\hbar^2 \alpha}{m} (2\alpha x^2 - 3)$$

Problem 19.84 Challenge

ในระบบหนึ่งมิติฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคมวล m เป็นไปตามสมการ $\Psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}$ โดยที่ α เป็นค่าคงที่ จงหาพลังงาน และพลังงานศักย์ของระบบดังกล่าว?

$$\text{Answer : } E = \frac{\alpha \hbar^2}{m} \text{ and } U(x) = \frac{2\alpha^2 \hbar^2 x^2}{m}$$

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

อนุภาคในกล่อง (A Particle in a Box)

พิจารณาอนุภาคควอนตัมมวล m อยู่ในระบบซึ่งมีพลังงานศักย์ตามสมการ

$$U(x) = \begin{cases} 0 & ; x_0 - \frac{L}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{L}{2} \\ \infty & ; \text{Other } x \end{cases}$$

เมื่อ x_0 คือ ตำแหน่งกลางกล่อง และ L คือ ความกว้างของกล่อง

เมื่อพิจารณาในช่วง $x_0 - \frac{L}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{L}{2}$ จะได้

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 0\right)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + k^2 \Psi(x) = 0 \quad ; k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\therefore \Psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

กำหนดให้ $A = C \cos(k\ell)$ และ $B = C \sin(k\ell)$ จะได้ $C^2 = A^2 + B^2$

$$\therefore \Psi(x) = C \cos(k\ell) \sin(kx) + C \sin(k\ell) \cos(kx)$$

$$\Psi(x) = C \sin(k(x + \ell))$$

พิจารณาเงื่อนไขขอบ

$$\Psi(x_0 - \frac{L}{2}) = 0$$

$$C \sin(k(x_0 - \frac{L}{2} + \ell)) = 0$$

$$\sin(kx_0 + k\ell) \cos(k\frac{L}{2}) - \sin(k\frac{L}{2}) \cos(kx_0 + k\ell) = 0$$

$$\sin(kx_0 + k\ell) \cos(k\frac{L}{2}) = \sin(k\frac{L}{2}) \cos(kx_0 + k\ell)$$

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

$$\tan(kx_0 + k\ell) = \tan(k\frac{L}{2})$$

$$kx_0 + k\ell = k\frac{L}{2}$$

$$x_0 + \ell = \frac{L}{2}$$

$$\ell = \frac{L}{2} - x_0$$

พิจารณาเงื่อนไขขอบ

$$\Psi(x_0 + \frac{L}{2}) = 0$$

$$C\sin(k(x_0 + \frac{L}{2} + \ell)) = 0$$

$$\sin(k(x_0 + \frac{L}{2} + \ell)) = 0$$

$$k(x_0 + \frac{L}{2} + \ell) = n\pi \quad ; n = 1, 2, 3 \dots$$

$$k(x_0 + \frac{L}{2} + (\frac{L}{2} - x_0)) = n\pi \quad ; n = 1, 2, 3 \dots$$

$$kL = n\pi$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

จาก

$$k_n = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\frac{n\pi}{L} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = \frac{n^2h^2}{8mL^2}$$

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

จาก
$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{n\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

จาก
$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$p_n = \frac{nh}{2L}$$

$$\therefore \Psi(x) = \begin{cases} C \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x - x_0 + \frac{L}{2})\right) & ; x_0 - \frac{L}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{L}{2} \\ 0 & ; \text{Other } x \end{cases}$$

จาก Normalization Condition จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 1$$

$$\int_{x_0-L/2}^{x_0+L/2} C^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}(x - x_0 + \frac{L}{2})\right) dx = 1$$

$$\frac{C^2}{2} \int_{x_0-L/2}^{x_0+L/2} (1 - \cos(\frac{2n\pi}{L}(x - x_0 + \frac{L}{2}))) dx = 1$$

$$\frac{C^2}{2} (x - \frac{L}{2n\pi} \sin(\frac{2n\pi}{L}(x - x_0 + \frac{L}{2}))) \Big|_{x_0-L/2}^{x_0+L/2} = 1$$

$$\frac{C^2 L}{2} = 1$$

$$C = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

$$\therefore \Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\left(x - x_0 + \frac{L}{2}\right)\right) & ; x_0 - \frac{L}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{L}{2} \\ 0 & ; \text{Other } x \end{cases}$$

จาก $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x \Psi dx$

$$\langle x \rangle = \int_{x_0-L/2}^{x_0+L/2} \frac{2}{L} x \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}\left(x - x_0 + \frac{L}{2}\right)\right) dx$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{L} \int_{x_0-L/2}^{x_0+L/2} x \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{L}\left(x - x_0 + \frac{L}{2}\right)\right)\right) dx$$

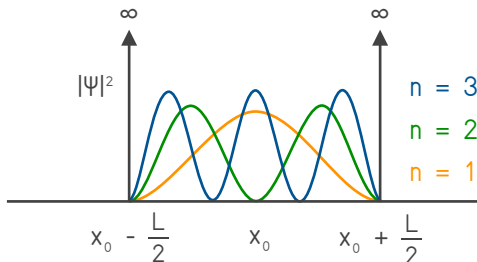
$$\langle x \rangle = \frac{1}{L} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{Lx}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi}{L}\left(x - x_0 + \frac{L}{2}\right)\right) \right. \\ \left. + \int \frac{L}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi}{L}\left(x - x_0 + \frac{L}{2}\right)\right) dx \right) \Big|_{x_0-L/2}^{x_0+L/2}$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{L} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{Lx}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi}{L}\left(x - x_0 + \frac{L}{2}\right)\right) \right. \\ \left. - \left(\frac{L}{2n\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{2n\pi}{L}\left(x - x_0 + \frac{L}{2}\right)\right) \right) \Big|_{x_0-L/2}^{x_0+L/2}$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2L} \left((x_0 + \frac{L}{2})^2 - (x_0 - \frac{L}{2})^2 \right)$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2L} (x_0^2 + 2x_0L + \frac{L^2}{4} - x_0^2 + 2x_0L - \frac{L^2}{4})$$

$$\langle x \rangle = x_0$$





อนุภาคในกล่อง (A Particle in a Box)

อนุภาคมวล m ถูกกักอยู่ในกล่องกว้าง L และมีจุดศูนย์กลางกล่องอยู่ที่ตำแหน่ง x_0

ฟังก์ชันพลังงานศักย์ $U(x)$

$$U(x) = \begin{cases} 0 & ; x_0 - \frac{L}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{L}{2} \\ \infty & ; \text{Other } x \end{cases}$$

ฟังก์ชันคลื่น

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x - x_0 + \frac{L}{2})\right) & ; x_0 - \frac{L}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{L}{2} \\ 0 & ; \text{Other } x \end{cases}$$

ความยาวคลื่น

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

ขนาดโมเมนตัม

$$p_n = \frac{nh}{2L}$$

พลังงาน

$$E_n = K_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

เมื่อ n คือ ระดับพลังงานของอนุภาค ($n = 1, 2, 3, \dots$)

ค่าคาดหวังของตำแหน่ง

$$\langle x \rangle = x_0$$

เพิ่มเติม

สถานะพื้น (Ground State) คือ สถานะที่ $n = 1$

สถานะกระตุ้นที่ n (Excited State) คือ สถานะที่ $n + 1$

Problem 19.85 Challenge

อนุภาคมวล m ในกล่อง 1 มิติโดยมีขอบกล่องอยู่ที่ตำแหน่ง $x = -L$ และ $x = L$ จงหาฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของอนุภาคดังกล่าวที่สถานะกระตุ้นที่ 1?

$$\text{Answer : } \Psi(x) = -\frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \text{ and } E = \frac{h^2}{8mL^2}$$

Problem 19.86 Challenge

อนุภาคมวล m ในกล่อง 1 มิติโดยมีขอบกล่องอยู่ที่ตำแหน่ง $x = 0$ และ $x = L$ จงหาฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของอนุภาคดังกล่าวที่สถานะพื้น?

$$\text{Answer : } \Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \text{ and } E = \frac{h^2}{8mL^2}$$

Problem 19.87 Challenge

อนุภาคมวล m ถูกกักในกล่อง 1 มิติกว้าง L จงหาความยาวคลื่นของโฟตอนที่ปลดปล่อยจากอิเล็กตรอนในการเปลี่ยนสถานะจากกระตุ้นที่ 4 ไปยังสถานะพื้น?

$$\text{Answer : } \frac{m c L^2}{3h}$$

Problem 19.88 Challenge

อิเล็กตรอนมวล m ถูกกักอยู่ในกล่องหนึ่งมิติ ได้ดูดกลืนโฟตอนที่ความยาวคลื่น λ ส่งผลให้อิเล็กตรอนเปลี่ยนสถานะพื้นไปยังสถานะกระตุ้นที่ 3 จงหา

- ความกว้างของกล่อง?
- ความยาวคลื่นของโฟตอนที่ปลดปล่อยจากอิเล็กตรอนในการเปลี่ยนสถานะจากกระตุ้นที่ 3 ไปยังสถานะกระตุ้นที่ 1?
- ขนาดความเร็วต่ำสุดที่เป็นไปได้ของอิเล็กตรอนดังกล่าว?

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

$$\text{Answer : a) } \sqrt{\frac{15h\lambda}{8mc}}, \text{ b) } \frac{5\lambda}{4}, \text{ c) } \sqrt{\frac{2hc}{15m\lambda}}$$

The Simple Harmonic Oscillator

เมื่อพิจารณาอนุภาคมวล m อยู่ในระบบซึ่งมีพลังงานศักย์ตามสมการ

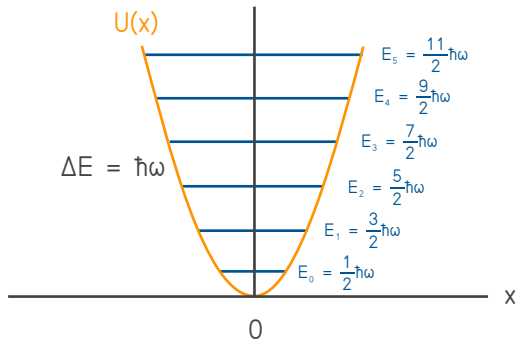
$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad ; k \text{ คือ ค่าคงที่}$$

จาก The Schrödinger Equation จะได้ฟังก์ชันคลื่นอยู่ในรูปสมการ

$$\Psi(x) = Be^{-(m\omega/2\hbar)x^2}$$

และ $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$; $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\therefore \Delta E = ((n+1) + \frac{1}{2})\hbar\omega - (n + \frac{1}{2})\hbar\omega = \hbar\omega$$



Problem 19.89 Challenge

จงหาแอมพลิจูดของอนุภาคมวล m ซึ่งอยู่ในปรากฏการณ์ Harmonic Oscillations แบบ Classical Oscillator ในสถานะ n และมีความถี่เชิงมุม ω ?

$$\text{Answer : } \sqrt{\frac{(2n + 1)\hbar}{m\omega}}$$

Problem 19.90 Challenge

จงหาความคลาดเคลื่อนในการวัดตำแหน่ง ณ จุดต่ำสุดของพลังงานของอนุภาคมวล m ในปรากฏการณ์ Harmonic Oscillations ซึ่งมีความถี่เชิงมุม ω ?

$$\text{Answer : } \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

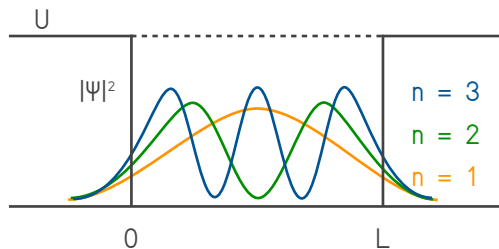
A Particle in a Well of Finite Height

เมื่อพิจารณาอนุภาคมวล m อยู่ในระบบซึ่งมีพลังงานศักย์ตามสมการ

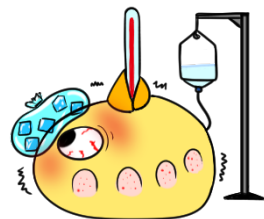
$$U(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x \leq L \\ U & ; \text{Other } x \end{cases}$$

จาก The Schrödinger Equation จะได้ฟังก์ชันคลื่นอยู่ในรูปสมการ

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{Cx} & ; x < 0 \\ F\sin(kx) + G\cos(kx) & ; 0 \leq x \leq L \\ Ae^{-Cx} & ; x > L \end{cases}$$



จากกราฟเห็นได้ว่ามีแนวโน้มจะเป็นที่จะพบอนุภาคอยู่นอกบริเวณที่พลังงานศักย์เป็นศูนย์ และแนวคิดดังกล่าวยังนำไปประยุกต์ใช้ในนาโนเทคโนโลยีเพื่ออธิบายพื้นที่เล็กๆ ของผลึกที่สามารถดักอิเล็กตรอนในระดับพลังงานที่สนใจได้

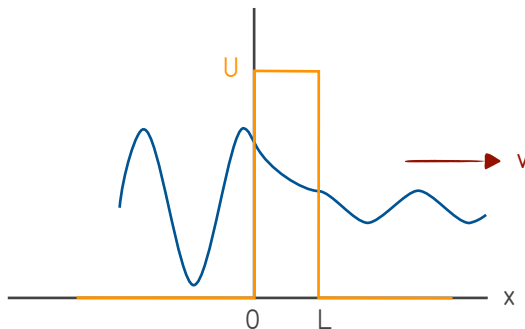


Tunneling Through a Potential Energy Barrier

เมื่อพิจารณาอนุภาคมวล m อยู่ในระบบซึ่งมีพลังงานศักย์ตามสมการ

$$U(x) = \begin{cases} U & ; 0 \leq x \leq L \\ 0 & ; \text{Other } x \end{cases}$$

จาก The Schrödinger Equation เราจะพิจารณาว่าบริเวณที่ 1 มีคลื่นเคลื่อนที่เข้าชนรอยต่อของตัวกลางที่ตำแหน่ง $x = 0$ ทำให้บริเวณที่ 1 เกิดการรวมกันระหว่างคลื่นตกกระทบและคลื่นสะท้อน และมีคลื่นส่งผ่านที่ถูกส่งต่อไปยังบริเวณที่ 2 และบริเวณที่ 3 ดังรูปด้านล่าง



จากกราฟเห็นได้ว่าอนุภาคสามารถทะลุกำแพงพลังงานศักย์ได้ ซึ่งขัดกับสิ่งที่ฟิสิกส์แบบดั้งเดิม (Classical Physics) ได้อธิบายไว้



ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

The Wave Functions for Hydrogen

เมื่อแทน $U(\vec{r}) = -\frac{ke^2}{r}$ ลงใน The Schrödinger Equation โดยพิจารณา $\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ เมื่อแก้ Partial Differential Equation ออกมาจะได้

$$E_n \approx -\frac{13.606}{n^2} \text{ eV}$$

โดยเรียก n ว่า “Principal Quantum Number” ซึ่งสอดคล้องกับระดับพลังงานของอิเล็กตรอนในไฮโดรเจนอะตอม และยังนำไปสู่เลขควอนตัมอื่นๆ เช่น Orbital Quantum Number (ℓ), Orbital Magnetic Quantum Number (m_ℓ) เป็นต้น

โดยฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอนในไฮโดรเจนอะตอมในสถานะ $1s$ ซึ่งมีรูปแบบที่ง่ายที่สุด คือ $\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$

จาก $P_{1s} dr = |\Psi(r)|^2 dV$

$$P_{1s} dr = \left(\frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0} \right) (4\pi r^2 dr)$$

$$P_{1s} = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

หาค่าสูงสุด $\frac{d}{dr}(P_{1s}) = 0$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0} \right) = 0$$

$$\frac{4}{a_0^3} \left(-\frac{2r^2}{a_0} + 2r \right) e^{-2r/a_0} = 0$$

$$r = a_0$$

เลขควอนตัม (The Quantum Numbers)



เลขควอนตัม (The Quantum Numbers)

Principal Quantum Number ; $n = 1, 2, 3, \dots$ โดย n จะสัมพันธ์กับพลังงานของอิเล็กตรอนในอะตอม เช่น ระดับพลังงานของอิเล็กตรอนในไฮโดรเจนอะตอมคำนวณได้จาก $E_n \approx -\frac{13.606}{n^2} \text{ eV}$ เป็นต้น

Orbital Quantum Number ; $\ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ (ในแต่ละระดับพลังงาน n จะมี ℓ ได้ทั้งหมด n ตัว) โดย ℓ จะสัมพันธ์กับโมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอนในอะตอม ตามสมการ

$$L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\hbar$$

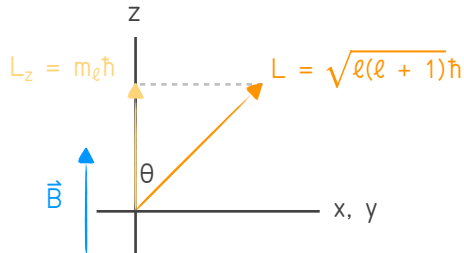
เพิ่มเติม : s Orbital คือ $\ell = 0$, p Orbital คือ $\ell = 1$, d Orbital คือ $\ell = 2$, f Orbital คือ $\ell = 3$, g Orbital คือ $\ell = 4, \dots$

Orbital Magnetic Quantum Number ; $m_\ell = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$ โดย m_ℓ จะสัมพันธ์กับโมเมนตัมเชิงมุมตามแนวแกน z ของอิเล็กตรอนในอะตอม ตามสมการ

$$L_z = m_\ell \hbar$$

เพิ่มเติม : แนวแกน z มีทิศทางตามสนามแม่เหล็กจากภายนอกที่กระทำกับอะตอม

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)



จากรูปด้านบน จะได้

$$\cos\theta = \frac{L_z}{L} = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}$$

The Spin Magnetic Quantum Number ; $m_s = +\frac{1}{2}$ เรียกว่า “Spin Up” และ $-\frac{1}{2}$ เรียกว่า “Spin Down” โดย m_s จะสัมพันธ์กับ Spin Angular Momentum ตามแนวแกน z ของอิเล็กตรอนในอะตอม ตามสมการ

$$S_z = m_s \hbar$$

เพิ่มเติม : Spin ของอิเล็กตรอนนั้นไม่ใช้การหมุนในทางกลศาสตร์แบบดั้งเดิม (Classical Mechanics) แต่ผลการคำนวณทางควอนตัมที่ทำให้อิเล็กตรอนมีโมเมนตัมเชิงมุมราวกับอิเล็กตรอนกำลังหมุนในแบบกลศาสตร์แบบดั้งเดิม

The Exclusion Principle

ในปี ค.ศ. 1925 Wolfgang Pauli ได้เสนอหลักการกีดกัน (The Exclusion Principle) ดังนี้ “ไม่มีอิเล็กตรอนสองตัวที่สามารถอยู่ในสถานะควอนตัมเดียวกันได้ ดังนั้นจึงไม่มีอิเล็กตรอนสองตัวในอะตอมเดียวกันที่สามารถมีเลขควอนตัมชุดเดียวกันได้” เมื่อชุดเลขควอนตัม คือ n , l , m_l และ m_s

Problem 19.91

อะตอมของธาตุชนิดหนึ่งมีอิเล็กตรอนสองตัวสุดท้ายอยู่ในชั้นย่อย p ของชั้น M ซึ่งมีเลขควอนตัมเท่ากับ 3 เลขอะตอมของธาตุดังกล่าวเป็นเท่าใด?

Answer : 14

Problem 19.92

ธาตุซึ่งมีอิเล็กตรอนจัดเรียงจนเต็มในออร์บิทัล $3p$ มีการจัดเรียงอิเล็กตรอนอย่างไร และอะตอมดังกล่าวมีอิเล็กตรอนเท่าใด?

Answer : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$ and 18**Problem 19.93**

ธาตุซึ่งมีอิเล็กตรอนจัดเรียงจนเต็มในออร์บิทัล $3d$ มีการจัดเรียงอิเล็กตรอนอย่างไร และอะตอมดังกล่าวมีอิเล็กตรอนเท่าใด เมื่อออร์บิทัล $4s$ มีระดับพลังงานต่ำกว่าออร์บิทัล $3d$?

Answer : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10}$ and 30

Problem 19.94 Challenge

จงหามุมที่โมเมนต์เชิงมุมของอิเล็กตรอนในอะตอมของไฮโดรเจนซึ่งอยู่ในสถานะ $4d$ เทียบกับทิศของสนามแม่เหล็กจากภายนอก ที่เป็นไปได้ทั้งหมด?

Answer : 145° , 114° , 90.0° , 66.0° and 35.3°

Problem 19.95 Challenge

อะตอมไฮโดรเจนอยู่ในสถานะกระตุ้นที่ 5 จงคำนวณหาค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของ Orbital Angular Momentum หลังจากที่มีอะตอมดังกล่าวปล่อยโฟตอน ความยาวคลื่น 1,090 nm ออกมา?

Answer : $\sqrt{6}\hbar$

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

ทฤษฎีแบนด์ (Band Theory)

เป็นทฤษฎีที่เกิดขึ้นจากการประยุกต์ใช้กลศาสตร์ควอนตัม เพื่ออธิบายพฤติกรรมของอิเล็กตรอนในโครงสร้างผลึก โดยมีแนวคิดหลัก คือ การรวมกันของออร์บิทัลของอะตอมแต่ละตัวในโครงสร้างผลึก ทำให้อิเล็กตรอนในวัสดุที่เป็นของแข็งสามารถมีระดับพลังงานได้เฉพาะในช่วงที่กำหนด ไม่ได้เป็นระดับพลังงานที่แยกจากกัน เรียกว่า “แถบพลังงาน (Energy Bands)” ซึ่งประกอบด้วย

แถบวาเลนซ์ (Valence Band) คือ แถบพลังงานที่มีอิเล็กตรอนอยู่ ซึ่งโดยปกติจะเป็นอิเล็กตรอนวงนอกสุดของอะตอม

แถบการนำ (Conduction Band) คือ แถบพลังงานที่สูงกว่าแถบวาเลนซ์ ซึ่งอิเล็กตรอนสามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระ ทำให้เกิดการนำไฟฟ้า

ช่องว่างแถบ (Band Gap) คือ ช่วงพลังงานระหว่างแถบวาเลนซ์และแถบการนำ ที่อิเล็กตรอนไม่สามารถอยู่ได้

จากทฤษฎีดังกล่าวนำไปสู่การแบ่งวัสดุได้กว้างๆ เป็น 3 ประเภท

โลหะ (Metal) คือ สารที่มีแถบวาเลนซ์และแถบการนำทับซ้อนกันทำให้มีอิเล็กตรอนอิสระจำนวนมาก ทำให้นำไฟฟ้าได้ดี

สารฉนวน (Insulator) คือ สารที่มีช่องว่างแถบขนาดใหญ่ ทำให้การกระตุ้นอิเล็กตรอนจากแถบวาเลนซ์ไปยังแถบการนำทำได้ยากมาก จึงนำไฟฟ้าไม่ดี

สารกึ่งตัวนำ (Semiconductor) คือ สารที่มีช่องว่างแถบขนาดปานกลาง จึงเป็นวัสดุที่มีสมบัติอยู่ระหว่างโลหะและฉนวนไฟฟ้า โดยทั่วไปมักทำจากซิลิคอน (Silicon) หรือเจอร์เมเนียม (Germanium) ความสามารถในการนำไฟฟ้าของสารกึ่งตัวนำสามารถควบคุมได้โดยการเติมสารเจือปน (Doping) หรือการเปลี่ยนแปลงสภาวะภายนอก เช่น อุณหภูมิ สนามแม่เหล็ก เป็นต้น

ประเภทของสารกึ่งตัวนำ

สารกึ่งตัวนำชนิดแท้ (Intrinsic Semiconductor) คือ สารกึ่งตัวนำบริสุทธิ์ ไม่มีสิ่งเจือปน

สารกึ่งตัวนำชนิดไม่แท้ (Extrinsic Semiconductor) คือ สารกึ่งตัวนำที่

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)

เติมสารเจือปนเข้าไปเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการนำไฟฟ้า ซึ่งแบ่งย่อยได้เป็นสองชนิด คือ สารกึ่งตัวนำชนิด N (N-Type) ซึ่งมีอิเล็กตรอนอิสระเพิ่มขึ้นจากการเติมสารเจือปนที่มีอิเล็กตรอนวงนอกมากกว่า 4 ตัว และสารกึ่งตัวนำชนิด P (P-Type) ซึ่งมีโฮล (Hole) หรือช่องว่างของอิเล็กตรอนเพิ่มขึ้นจากการเติมสารเจือปนที่มีอิเล็กตรอนวงนอกน้อยกว่า 4 ตัว

สารกึ่งตัวนำได้ถูกนำมาสร้างอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ต่างๆ เพื่อใช้ในการควบคุมทิศทางและการไหลของกระแสไฟฟ้า เช่น ไดโอด (Diode) ทรานซิสเตอร์ (Transistor) ชิปประมวลผล (Processor chip) เป็นต้น

เลเซอร์ (Lasers)

สมมติอิเล็กตรอนอยู่ในระดับพลังงาน E_2 โดยที่ $E_2 > E_1$ เมื่อมีโฟตอนความถี่ f โดยที่ $hf = E_2 - E_1$ เข้ามากระทบอะตอม จะกระตุ้นให้อิเล็กตรอนเปลี่ยนระดับพลังงานจาก E_2 ไปยังสถานะพื้น E_1 และปล่อยโฟตอนความถี่ f ออกมาเหมือนกับโฟตอนที่เข้ามากระตุ้น ทำให้ได้โฟตอนที่เหมือนกันสองตัวออกมา และโฟตอนดังกล่าวจะไปกระตุ้นอิเล็กตรอนในอะตอมอื่นๆ เป็นปฏิกิริยาแบบลูกโซ่ทำให้ได้โฟตอนที่เหมือนกันออกมาจำนวนมาก ทำให้เลเซอร์มีสมบัติ ดังนี้

- 1) เลเซอร์เป็นคลื่นอาพันธ์ (Coherent)
- 2) เลเซอร์เป็นคลื่นที่มีความยาวคลื่นค่าเดียว (Monochromatic)
- 3) ลำเลเซอร์มีมุมเบนกระจายออกน้อยมากแม้ในระยะทางไกลๆ

เพื่อให้ความเข้มของโฟตอนสูงมากพอจะเป็นเลเซอร์จะต้องมีเงื่อนไขดังนี้

- 1) ระบบต้องมีอะตอมอยู่ในสถานะกระตุ้นมากกว่าสถานะพื้น
- 2) สถานะกระตุ้นจะต้องอยู่ใน สถานะกึ่งเสถียร (Metastable State)

เพื่อให้อิเล็กตรอนมีเวลาอยู่ได้นานมากขึ้น

- 3) โฟตอนที่ถูกละปล่อยออกมาจะต้องอยู่ในระบบนานพอที่จะกระตุ้นให้เกิดโฟตอนจากอะตอมอื่นๆ ต่อได้

ฟิสิกส์อะตอมและควอนตัมฟิสิกส์ (Atomic Physics and Quantum Physics)



Pinfist : มัธยมศึกษาตอนปลาย และอุดมศึกษา